II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
1962

ОБ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Б. ГРИГЕЛИОНИС

Процесс $\left\{X(t),\ t\in(0,\ \infty)\right\}$ назовем процессом восстановления типа $\left(\hat{F}(x),\ F(x)\right)$, если существует последовательность независимых неотрицательных случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_k,\ \ldots \tag{1}$$

таких, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1<x\}=\hat{F}(x),\ \mathbf{P}\{\xi_k<x\}=F(x)\qquad (k=2,\ 3,\ \ldots)$$

и $X(t)$ равно максимальному значению n, для которого $\sum_{k=1}^{n}\xi_k<t$.

Пусть имеем последовательность процессов $\left\{X_n(t)\right\}$ таких, что

$$X_n(t)=\sum_{z=1}^{k_n}X_{nr}(t),$$

где $X_{nr}(t)$ при каждом n независимы и являются процессами восстановления типа $\left(\hat{F}_{nr}(x),\ F_{nr}(x)\right)$.

Введем обозначения:

$$F_n(x,\ t)=\mathbf{P}\left\{X_n(t)<x\right\},$$

$$P_n(k,\ t)=\mathbf{P}\left\{X_n(t)=k\right\},$$

$$p_{nr}(k,\ t)=\mathbf{P}\left\{X_{nr}(t)=k\right\},\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

$$\Lambda_{nr}(t)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad t<0,\\ \mathbf{M}X_{nr}(t) & \text{при}\quad t\geqslant 0.\end{cases}$$

Предположим, что при любом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\hat{F}_{nr}(t)=\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}F_{nr}(t)=0, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\Lambda_{nr}(t)=\Lambda(t), \tag{3}$$

где $\Lambda(t)$ — конечная функция.

В работе будет доказываться сходимость процесса $X_n(t)$ к процессу Пуассона, а также изучаться скорость сходимости.

Чтобы лучше понять смысл задачи и накладываемых условий, представим следующую физическую картину. Имеется какая-то система, состоящая из k_n узлов, которые время от времени выходят из строя и немедленно восстанавливаются. Процессу $X_{nr}(t)$ соответствует число восстановлений r-го узла до момента времени t, а $X_n(t)$ — общее число восстановлений до момента t. Условие (2), например, сводится к требованию, чтобы каждый отдельно взятый узел за фиксированное время выходил из строя с малой вероятностью.

Прежде чем приступить к доказательству наших теорем, докажем несколько лемм, которые нам далее понадобятся.

Лемма 1. *При предположении* (2) *соотношение* (3) *имеет место тогда и только тогда, когда при любом фиксированном* t

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t)=\Lambda(t). \tag{4}$$

Доказательство. Легко сообразить, что

$$\begin{aligned}
&p_{nr}(0,\ t)=1-\hat{F}_{nr}(t),\\
&p_{nr}(1,\ t)=\hat{F}_{nr}(t)-\hat{F}_{nr}(t)*F_{nr}(t),\\
&p_{nr}(k,\ t)=\hat{F}_{nr}(t)*\left[F_{nr}^{*(k-1)}(t)-F_{nr}^{*(k)}(t)\right], \qquad k=2,\ 3,\ \ldots,
\end{aligned} \tag{5}$$

где символ $*$ означает свертку, а $*(k)$ — k-кратную свертку.

Далее из (6), пользуясь преобразованием Абеля, находим, что при $t\geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{nr}(t)&=\sum_{k=1}^{\infty}kp_{nr}(k,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}k\hat{F}_{nr}(t)*\left[F_{nr}^{*(k-1)}(t)-F_{nr}^{*(k)}(t)\right]=\\
&=\hat{F}_{nr}(t)*\sum_{k=0}^{\infty}F_{nr}^{*(k)}(t)\left[(k+1)-k\right]=\hat{F}_{nr}(t)*\sum_{k=0}^{\infty}F_{nr}^{*(k)}(t).
\end{aligned} \tag{6}$$

где положено $F_{nr}^{*(0)}(t)\equiv\varepsilon(t)=1$ при $t>0$ и $=0$ при $t\leqslant 0$. В силу (6), имеем, что

$$\begin{aligned}
\Lambda_{nr}(t)*F_{nr}(t)&=\hat{F}_{nr}(t)*\sum_{k=1}^{\infty}F_{nr}^{*(k)}(t)=\\
&=\hat{F}_{nr}(t)*\left[\sum_{k=0}^{\infty}F_{nr}^{*(k)}(t)-\varepsilon(t)\right]=\Lambda_{nr}(t)-F_{nr}(t).
\end{aligned}$$

Итак, $\Lambda_{nr}(t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\Lambda_{nr}(t)=\hat{F}_{nr}(t)+F_{nr}(t)*\Lambda_{nr}(t). \tag{7}$$

Из (2) и (8) получаем, что

$$\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t)=\sum_{r=1}^{k_n}\Lambda_{nr}(t)\cdot\left[1+o(1)\right],$$

где оценка $o(1)$ равномерна по r. Лемма 1 доказана.

Далее установим некоторые факты, связанные с произвольным процессом восстановления $X(t)$.

Рассматриваем последовательность (1).

Пусть

$$\zeta_n=\sum_{k=2}^{n+1}\xi_k,\quad \hat{\zeta}_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k;$$

$\nu_s(\hat{\nu}_s)$ — число сумм $\zeta_n(\hat{\zeta}_n)$, меньших s; $\gamma_s=\zeta_{\nu_s+1}-s\,(\hat{\gamma}_s=\hat{\zeta}_{\hat{\nu}_s+1}-s)$ – величина первого перескока сумм $\zeta_n(\hat{\zeta}_n)$ через барьер s;

$$W_s(u)=\mathbf{P}\{\gamma_s\geqslant u\},\quad \hat{W}_s(u)=\mathbf{P}\{\hat{\gamma}_s\geqslant u\}.$$

Лемма 2. *Верны следующие соотношения:*

$$W_t(u)=\int_0^t W_{t-s}(u)\,dF(s)+1-F(u+t), \tag{8}$$

$$\hat{W}_t(u)=\int_0^t W_{t-s}(u)\,d\hat{F}(s)+1-\hat{F}(u+t). \tag{9}$$

Доказательство (см. также [2], стр. 250). Соотношения (8) и (9) прямо следуют из формулы полной вероятности, если заметить, что

$$\mathbf{P}\{\gamma_t\geqslant u\mid \xi_1=s\}=\mathbf{P}\{\hat{\gamma}_t\geqslant u\mid \xi_1=s\}=\begin{cases} W_{t-s}(u) & \text{при}\quad 0\leqslant s<t,\\ 0 & \text{при}\quad t\leqslant s<t+u,\\ 1 & \text{при}\quad t+u\leqslant s.\end{cases}$$

Замечание. Ясно, что $\Big\{X(t+s)-X(s),\ t\in(0,\ \infty)\Big\}$ будет процессом восстановления типа $\Big(1-\hat{W}_s(x),\ F(x)\Big)$.

Пусть $W_t^{(n,r)}(u)$ и $\hat{W}_t^{(n,r)}(u)$ — соответствующие функции для наших процессов $X_{nr}(t)\,(r=1,\ \ldots,\ k_n)$. Если обозначить

$$p_{nr}(k,\ s,\ t)=\mathbf{P}\Big\{X_{nr}(t+s)-X_{nr}(s)=k\Big\},$$

то, как нетрудно понять, имеем, что

$$\begin{aligned} p_{nr}(0,\ s,\ t)&=\hat{W}_s^{(n,r)}(t),\\ p_{nr}(1,\ s,\ t)&=\Big[1-\hat{W}_s^{(n,r)}(t)\Big]*\Big[\varepsilon(t)-F_{nr}(t)\Big],\\ p_{nr}(k,\ s,\ t)&=\Big[1-\hat{W}_s^{(n,r)}(t)\Big]*\Big[F_{nr}^{*(k-1)}(t)-F_{nr}^{*(k)}(t)\Big]. \end{aligned} \tag{10}$$

Далее нам понадобится следующая

Лемма 3. *При любых фиксированных s и t*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\Big(1-\hat{W}_s^{(n,r)}(t)\Big)=0 \tag{11}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\Big(1-\hat{W}_s^{(n,r)}(t)\Big)=\Lambda(t+s)-\Lambda(s). \tag{12}$$

Доказательство. В силу (2) и (9), имеем, что

$$1-\hat{W}_s^{(n,r)}(t)=\int_0^s\left[1-W_{s-u}^{(n,r)}(t)\right]d\hat{F}_{nr}(u)+\hat{F}_{nr}(s+t)-\hat{F}_{nr}(s), \tag{13}$$

$$1-\hat{W}_s^{(n,r)}(t)\leqslant\hat{F}_{nr}(t+s)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\left(1-\hat{W}_s^{(n,r)}(t)\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\hat{F}_{nr}(t+s)=0.$$

Аналогично из (2) и (8) находим, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\left(1-W_s^{(n,r)}(t)\right)=0.$$

Тогда из (3) и (13) следует, что

$$\sum_{r=1}^{k_n}\left[1-\hat{W}_s^{(n,r)}(t)\right]=\sum_{r=1}^{k_n}\left[\hat{F}_{nr}(t+s)-\hat{F}_{nr}(s)\right]+o(1)\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(s)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\left[1-\hat{W}_s^{(n,r)}(t)\right]=\Lambda(t+s)-\Lambda(s).$$

Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (2) *и* (3), *то конечномерные распределения процесса* $X_n(t)$ *слабо сходятся к соответствующим распределениям процесса Пуассона, определяемых функцией* $\Lambda(t)$.

Доказательство. В силу (2), (4) и (5) имеем, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\left(1-p_{nr}(0,\ t)\right)=\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\hat{F}_{nr}(t)=0, \tag{14}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}(1,\ t)=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t)-\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t)*F_{nr}(t)\right]=\Lambda(t) \tag{15}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\left(1-p_{nr}(0,\ t)-p_{nr}(1,\ t)\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t)*F_{nr}(t)=0. \tag{16}$$

Из (14) следует, что $X_n(t)$ представляет собой сумму бесконечно малых независимых случайных величин. По теореме 5 из [1] (стр. 141) в силу (14)—(16) получаем, что $F_n(x,\ t)$ слабо сходятся к пуассоновской функции распределения с параметром $\Lambda(t)$:

$$P\left(x,\ \Lambda(t)\right)=\sum_{0\leqslant k<x}e^{-\Lambda(t)}\frac{[\Lambda(t)]^k}{k!}.$$

В частности, отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}P_n(k,\ t)=e^{-\Lambda(t)}\frac{[\Lambda(t)]^k}{k!}. \tag{17}$$

Аналогично, исходя из соотношений (10)—(12), находим, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left\{X_n(t+s)-X_n(s)=k\right\}=e^{-[\Lambda(t+s)-\Lambda(s)]}\frac{\left(\Lambda(t+s)-\Lambda(s)\right)^k}{k!}. \tag{18}$$

Пусть, далее.

$H_\tau^{(n)}$ — событие, состоящее в том, что ни при одном $r\,(r=1,\ \ldots,\ k_n)$ не выполняется неравенство $X_{nr}(\tau)\geqslant 2$, где τ — любое фиксированное число;

$\bar H_\tau^{(n)}$ — событие, противоположное $H_\tau^{(n)}$.

В силу (2), (4) и (5) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\bar H_\tau^{(n)}\right\}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\left\{X_{nr}(\tau)\geqslant 2\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\hat F_{nr}(\tau)*F_{nr}(\tau)=0. \tag{19}$$

Пусть теперь имеем любые наборы действительных чисел

$$0\leqslant t_0<t_1<\ldots<t_m<\infty$$

и целых неотрицательных чисел $l_\nu\,(\nu=1,\ \ldots,\ m)$. Очевидно, что в силу независимости слагаемых $X_{nr}(t)$ при гипотезе $H_\tau^{(n)}$ процесс $\left\{X_n(t),\ 0\leqslant t\leqslant\tau\right\}$ имеет асимптотически независимые приращения.

Выбрав $\tau\geqslant t_m$ и приняв во внимание (18) и (19), имеем, что

$$\mathbf{P}\left\{X_n(t_\nu)-X_n(t_{\nu-1})=l_\nu,\ \nu=1,\ \ldots,\ m\right\}=$$

$$=\mathbf{P}\left\{X_n(t_\nu)-X_n(t_{\nu-1})=l_\nu,\ \nu=1,\ \ldots,\ m;\ H_\tau^{(n)}\right\}+$$

$$+\mathbf{P}\left\{X_n(t_\nu)-X_n(t_{\nu-1})=l_\nu,\ \nu=1,\ \ldots,\ m;\ \bar H_\tau^{(n)}\right\}=$$

$$=\prod_{\nu=1}^{m}\mathbf{P}\left\{X_n(t_\nu)-X_n(t_{\nu-1})=l_\nu,\ \nu=1,\ \ldots,\ m;\ H_\tau^{(n)}\right\}+o(1)=$$

$$=\prod_{\nu=1}^{m}\mathbf{P}\left\{X_n(t_\nu)-X_n(t_{\nu-1})=l_\nu\right\}+o(1)=$$

$$=\prod_{\nu=1}^{m}e^{-[\Lambda(t_\nu)-\Lambda(t_{\nu-1})]}\,\frac{\left(\Lambda(t_\nu)-\Lambda(t_{\nu-1})\right)^k}{k!}+o(1).$$

Теорема 1 доказана.

Пользуясь результатами работы [3], оценим скорость сходимости $F_n(x,\ t)$ и $P\left(x,\ \Lambda(t)\right)$.

Теорема 2. *При условиях теоремы* 1 *существует константа* C, *зависящая только от* t, *такая, что*

$$\sup_{-\infty<x\leqslant\infty}\Big|F_n(x,\ t)-P\left(x,\ \Lambda(t)\right)-A_n(t)P_1\left(x,\ \Lambda,\ (t)\right)-$$

$$-B_n(t)P_{11}\left(x,\ \Lambda(t)\right)-C_n(t)P_2\left(x,\ \Lambda(t)\right)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant C\left[A_n^2(t)+B_n^2(t)+C_n^2(t)+D_n(t)+E_n(t)+G_n(t)\right], \tag{20}$$

где $P_1(x, \lambda)$, $P_{11}(x, \lambda)$, $P_2(x, \lambda)$ — ступенчатые функции, сконструированные в [3],

$$A_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n} \hat{F}_{nr}(t) * \left(\varepsilon(t)-F_{nr}(t)\right)-\Lambda(t)=\Lambda_n(t)-\Lambda(t),$$

$$B_n(t)=-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k_n}\left[\hat{F}_{nr}(t) * \left(\varepsilon(t)-F_{nr}(t)\right)\right]^2,$$

$$C_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n} \hat{F}_{nr}(t) * F_{nr}(t), \quad D_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n} \hat{F}_{nr}(t) * F_{nr}^{*(2)}(t),$$

$$E_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n}\left[\hat{F}_{nr}(t) * F_{nr}(t)\right]\hat{F}_{nr}(t), \quad G_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n}\left[\hat{F}_{nr}(t)\right]^3. \tag{21}$$

Доказательство. Так как $\mathrm{M}X_{nr}(t)=\Lambda_{nr}(t)<\infty$ и $\sum_{r=1}^{k_n}\mathrm{M}X_{nr}(t)=\sum_{r=1}^{k_n}\Lambda_{nr}(t)=\Lambda(t)\left(1+o(1)\right)$, то применимы все результаты работы [3]. Из теоремы 2 указанной работы следует, что при тех же условиях и обозначениях существует константа C_1 такая, что

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\Big|F_n(x)-P(x, \lambda)-\Big(\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}(1)-\lambda\Big)P_1(x, \lambda)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}^2(1)P_{11}(x, \lambda)-\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}(2)P_2(x, \lambda)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant C_1\Big[\Big(\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}(1)-\lambda\Big)\Big]^2+\Big(\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}^2(1)\Big)^2+\sum_{r=1}^{k_n}\Big[p_{nr}^3(1)+$$

$$+p_{nr}(1)\left(1-p_{nr}(0)\right)\left(1-p_{nr}(0)-p_{nr}(1)\right)\Big]+\Big(\sum_{r=1}^{k_n}\left(1-p_{nr}(0)-p_{nr}(1)\right)\Big)^2+$$

$$+\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}(1)\left(1-p_{nr}(0)-p_{nr}(1)\right)+\sum_{r=1}^{k_n}\left(1-p_{nr}(0)-p_{nr}(1)-p_{nr}(2)\right)\Big]\leqslant$$

$$\leqslant C_1\Big[\Big(\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}(1)-\lambda\Big)^2+\Big(\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}^2(1)\Big)^2+\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}^3(1)+$$

$$+2\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}(1)\left(1-p_{nr}(0)-p_{nr}(1)\right)+\Big(\sum_{r=1}^{k_n}\left(1-p_{nr}(0)-p_{nr}(1)\right)\Big)^2+$$

$$+\sum_{r=1}^{k_n}\left(1-p_{nr}(0)-p_{nr}(1)-p_{nr}(2)\right)\Big]. \tag{22}$$

В нашем случае $\lambda=\Lambda(t)$, и ввиду (6) имеем:

$$\sum_{r=1}^{k_n} p_{nr}(1)-\lambda=\sum_{r=1}^{k_n} p_{nr}(1,\ t)-\Lambda(t)=A_n(t),$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k_n} p_{nr}^2(1)=-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k_n} p_{nr}^2(1,\ t)=B_n(t),$$

$$\sum_{r=1}^{k_n} p_{nr}(2)=\sum_{r=1}^{k_n} p_{nr}(2,\ t)=C_n(t)-D_n(t),$$

$$\sum_{r=1}^{k_n}\Big(1-p_{nr}(0,\ t)-p_{nr}(1,\ t)-p_{nr}(2,\ t)\Big)=\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t)*F_{nr}^{*(2)}(t)=D_n(t),$$

$$\Big(\sum_{r=1}^{k_n}\Big(1-p_{nr}(0,\ t)-p_{nr}(1,\ t)\Big)\Big)^2=\Big(\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t)*F_{nr}(t)\Big)^2=C_n^2(t),$$

$$\sum_{r=1}^{k_n} p_{nr}(1,\ t)\Big(1-p_{nr}(0,\ t)-p_{nr}(1,\ t)\Big)=\sum_{r=1}^{k_n}\Big[\hat{F}_{nr}(t)*\Big(\varepsilon(t)-F_{nr}(t)\Big)\Big]\hat{F}_{nr}(t)*F_{nr}(t)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{r=1}^{k_n}\Big[\hat{F}_{nr}(t)*F_{nr}(t)\Big]\hat{F}_{nr}(t)=E_n(t),$$

$$\sum_{r=1}^{k_n} p_{nr}^3(1)=\sum_{r=1}^{k_n}\Big[F_{nr}(t)*\Big(\varepsilon(t)-F_{nr}(t)\Big)\Big]^3\leqslant\sum_{r=1}^{k_n}\Big[\hat{F}_{nr}(t)\Big]^3=G_n(t). \tag{23}$$

В силу (22) и (23), положив $C=4C_1$, получим нашу теорему 2.

Когда $\Lambda_n(t)$ медленно сходится к $\Lambda(t)$, бывает полезной следующая

Теорема 3. *При условиях теоремы* 1 *существует константа* C, *зависящая только от* t, *такая, что*

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\Big|F_n(x,\ t)-P\Big(x,\ \Lambda_n(t)\Big)-B_n(t)P_{11}\Big(x,\ \Lambda_n(t)\Big)-$$
$$-C_n(t)P_2\Big(x,\ \Lambda_n(t)\Big)\Big|\leqslant C\Big[B_n^2(t)+C_n^2(t)+D_n(t)+E_n(t)+G_n(t)\Big].$$

Она выводится из результатов работы [3] так же, как и теорема 2.

В заключение рассмотрим два примера:

Пример 1. Пусть все процессы $X_{nr}(t)$ одинаково распределены:

$$\hat{F}_{nr}(t)=F_{nr}(t)=F_n(t),$$

$$\Lambda_{nr}(t)=\frac{\Lambda(t)}{n},\qquad r=1,\ \ldots,\ n,$$

где $\Lambda(t)$ — неубывающая непрерывная слева конечная функция такая, что $\Lambda(t)=0$ при $t\leqslant 0$.

В силу (7) имеем, что

$$\frac{\Lambda(t)}{n}=F_n(t)+\frac{1}{n}F_n(t)*\Lambda(t).$$

Как легко проверить, отсюда следует, что при $n>\Lambda(t)$

$$F_n(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{n^k}\Lambda^{*(k)}(t). \tag{24}$$

Из (24) находим, что при любом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t)=0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} nF_n(t)=\Lambda(t).$$

Итак, применимы все выше полученные результаты.

Поскольку

$$F_n(t)=\frac{\Lambda(t)}{n}-\frac{\Lambda^{*(2)}(t)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{25}$$

то из (21) легко видеть, что

$$A_n^2(t)+B_n^2(t)+C_n^2(t)+D_n(t)+E_n(t)+G_n(t)=O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{26}$$

Далее, ввиду (25) имеем:

$$A_n(t)=nF_n(t)*\left(\varepsilon(t)-F_n(t)\right)-\Lambda(t)=n\left(\frac{\Lambda(t)}{n}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n^2}\Lambda^{*(2)}(t)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)*\left(\varepsilon(t)-\frac{\Lambda(t)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\Lambda(t)=$$

$$=-\frac{2}{n}\Lambda^{*(2)}(t)+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$B_n(t)=-\frac{1}{2}n\left[F_n(t)*\left(\varepsilon(t)-F_n(t)\right)\right]^2=-\frac{1}{2}n\left(\frac{\Lambda(t)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2=$$

$$=-\frac{\Lambda^2(t)}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$C_n(t)=nF_n^{*(2)}(t)=n\left(\frac{\Lambda^{*(2)}(t)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=\frac{\Lambda^{*(2)}(t)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{27}$$

Из теоремы 2 в силу (26) и (27) получаем, что

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x,\ t)-P\left(x,\ \Lambda(t)\right)+\frac{\Lambda^{*(2)}(t)}{2n}\left[2P_1\left(x,\ \Lambda(t)\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\Lambda^2(t)}{2n}P_{11}\left(x,\ \Lambda(t)\right)\right|\leqslant\frac{C}{n^2},$$

где константа C зависит только от t.

Так как (см. [3])

$$P_{11}\left(x,\ \Lambda(t)\right)=P_2\left(x,\ \Lambda(t)\right)-2P_1\left(x,\ \Lambda(t)\right),$$

то

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x,\ t)-P\left(x,\ \Lambda(t)\right)+\left[\frac{\Lambda^2(t)}{2n}-\frac{\Lambda^{*(2)}(t)}{n}\right]P_{11}\left(x,\ \Lambda(t)\right)\right|\leqslant\frac{C}{n^2}.$$

Замечание. Из теоремы 1 и леммы 1 видно, что класс предельных процессов при условиях (2)—(3) в точности совпадает с классом процессов Пуассона.

Пример 2. Пусть имеем функцию распределения $F(x)$ такую, что

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad x\leqslant 0,\\ \Lambda x^{\alpha}+o(x^{\alpha}) & \text{при}\quad x\to+0,\end{cases}$$

где Λ, α — положительные константы. Пусть, далее, процессы $X_{nr}(t)$, $r=1,\ \ldots,\ n$, все одинаково распределены,

$$\hat{F}_n(x)=F_{nr}(x)=F_n(x)=F\left(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right).$$

Тогда при любом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t)=F(0)=0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} nF_n(t)=\Lambda t^\alpha=\Lambda(t).$$

Отсюда видим, что предельный процесс будет однородным пуассоновским с параметром Λ тогда и только тогда, когда правая производная функции $F(x)$ в точке 0 существует, конечна и отлична от нуля. В случае существования, $\Lambda=F'(+0)$.

Пусть

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ \Lambda_1 x+\Lambda_2 x^2+O(x^3) & \text{при } x\to+0,\end{cases}$$

где Λ_1, Λ_2 — некоторые константы; $\Lambda_1>0$. Предельный процесс будет однородным пуассоновским с параметром Λ_1. После оценок, как и в примере 1, получаем, что

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x,\ t)-P(x,\ \Lambda_1 t)-\frac{t^2}{n}\left(\frac{\Lambda_1^2}{2}+\Lambda_2\right)P_1(x,\ \Lambda_1 t)\right|\leqslant\frac{C}{n^2}.$$

Если

$$F(x)=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du,$$

то

$$\Lambda_1=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}},\quad \Lambda_2=0.$$

Если

$$F(x)=1-e^{-\Lambda x},$$

то

$$\Lambda_1=\Lambda,\quad \Lambda_2=-\frac{\Lambda_1^2}{2},$$

и поправочный член исчезает, чего и следовало ожидать, поскольку в этом случае

$$F_n(x,\ t)\equiv P(x,\ \Lambda_1 t).$$

Выражаю искреннюю признательность Б. В. Гнеденко, прочитавшему рукопись этой заметки и давшему полезные советы.

Вильнюсский гос. университет
им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
23. XII. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949.
2. Е. Б. Дынкин, Некоторые предельные теоремы для сумм случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями, Изв. АН СССР, 19, 4 (1955), 247—266.
3. Б. Григелионис, Об асимптотическом разложении остаточного члена в случае сходимости к закону Пуассона, Лит. матем. сборник, 2, 1 (1962), 35—48.

APIE VIENĄ ATSTATYMO TEORIJOS RIBINĘ TEOREMĄ

B. GRIGELIONIS

(Reziumė)

Procesą $\left\{X(t),\ t\in[0,\ \infty)\right\}$ vadiname atstatymo procesu tipo $\left(\hat{F}(x),\ F(x)\right)$, jei

$$X(t)=\max\left\{n:\sum_{k=1}^{n}\xi_k<t\right\},$$

kur $\xi_1, \xi_2,\ldots$ — neneigiami ir nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai,

$$\mathrm{P}\{\xi_1<x\}=\hat{F}(x),\quad \mathrm{P}\{\xi_k<x\}=F(x)\,,\qquad (k=2,\ 3,\ \ldots).$$

Darbe nagrinėjama procesų

$$X_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n}X_{nr}(t),$$

kur $X_{nr}(t)$ — nepriklausomi atstatymo procesai tipo $\left(\hat{F}_{nr}(x),\ F_{nr}(x)\right)$, konvergencija į Puasono (aplamai nehomogeninį) procesą. Duodamas vienmačių pasiskirstymų asimptotinis išdėstymas.

ON A LIMIT THEOREM OF THE RENEWAL THEORY

B. GRIGELIONIS

(Summary)

A stochastic process $\left\{X(t),\ t\in[0,\ \infty)\right\}$ is said to be the renewal process of the type $\left(\hat{F}(x),\ F(x)\right)$ if

$$X(t)=\max\left\{n:\sum_{k=1}^{n}\xi_k<t\right\},$$

where $\xi_1, \xi_2,\ldots$ are non-negative independent stochastic variables such that

$$\mathrm{P}\{\xi_1<x\}=\hat{F}(x),\quad \mathrm{P}\{\xi_k<x\}=F(x)\qquad (k=2,\ 3,\ \ldots)$$

In the paper convergence of the processes

$$X_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n}X_{nr}(t),$$

where $X_{nr}(t)$ are the independent renewal processes of the type $\left(\hat{F}_{nr}(x),\ F_{nr}(x)\right)$, to the Poisson process (in generally nonhomogenous) is examined. An asymptotic decomposition of the one-dimensional distribution functions is given.
