II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МАКСИМУМА МОДУЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ш. СТРЕЛИЦ

В настоящей работе мы выведем некоторые простые свойства максимума модуля целой функции многих комплексных переменных. В § 1 мы остановимся на порядке роста произведения целых функций, в § 2 будет рассмотрен характер возрастания максимума модуля в зависимости от способа исчерпания пространства; наконец, в § 3 будет обобщена теорема „Б" нашей работы [6].

§ 1

1. Как показано в работе [1], порядок роста целой трансцендентной функции многих комплексных переменных $u=F(z_1\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$ не зависит от того, какими круговыми областями исчерпывается пространство. *Круговыми областями* мы называем семейство областей $v(R)$, обладающие тем свойством, что

$$(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)\in v(R)$$

тогда и только тогда, когда

$$\left(\frac{z_1}{R},\ \frac{z_2}{R},\ \ldots,\ \frac{z_n}{R}\right)\in v(1).$$

Семейство гиперповерхностей, ограничивающих такие области, мы будем называть круговыми гиперповерхностями. В частности, порядок функции $F(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$ мы можем установить, исчерпывая пространство областями, ограниченными полицилиндрами или гиперсферами и т. п., отождествляя порядок функции с порядком ее максимума модуля на круговых областях. Ниже мы дадим другое определение порядка целой трансцендентной функции, эквивалентное вышеприведенному.

Введем несколько обозначений. Максимум функции $|F(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)|$ на гиперповерхности $S(R)$ мы обозначаем через $M(R,\ F,\ S)$. Положим

$$F(z,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n)=F(A_1 z,\ A_2 z,\ \ldots,\ A_n z). \tag{1.1}$$

Очевидно, функция $F(z,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n)$ — целая функция. Мы обозначаем

$$\max_{|z|=r}|F(z,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n)|=m(r,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ F)$$

или сокращенно, в тех случаях, когда это не вызовет недоразумений, через

$$m(R,\ A)=m(R,\ A,\ F),\quad A=(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n).$$

Введем функцию

$$M(R,\ F)=M(R)=\operatorname{Sup} m(R,\ A),$$

где верхняя грань рассматривается на гиперконусе $\sum_{j=1}^{n}|A_j|\leqslant 1$.

Определение. *Порядком целой трансцендентной функции*

$$u=F(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$$

мы называем порядок функции $M(R,\ F)$.

Нетрудно видеть, что функция $M(R)$ – возрастающая. Покажем эквивалентность нашего определения порядка определению с помощью функции $M(R,\ F,\ S)$, где $S(R)$ – круговые гиперповерхности. В самом деле, очевидно, что всегда

$$M(R,\ A)\leqslant M(R,\ F,\ S), \tag{2.1}$$

где в качестве $S(R)$ мы выбираем на этот раз полицилиндр $|z_j|=R$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Отсюда

$$M(R)\leqslant M(R,\ F,\ S).$$

С другой стороны, при определенных значениях $A_1^0,\ A_2^0,\ \ldots,\ A_n^0$, $z_0=Re^{i\varphi}$,

$$\max_{\sum_{j=1}^{n}|z_j|=R}|F(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)|=\max_{\substack{|z|=R\\ \sum_{j=1}^{n}|A_j|=1}}|F(z_1,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n)|=$$

$$=|F(z_0,\ A_1^0,\ A_2^0,\ \ldots,\ A_n^0)|\leqslant M(R).$$

Из последнего соотношения, обозначив семейство гиперконусов через $\sigma(R)$, мы находим, что

$$M(R,\ F,\ \sigma)\leqslant M(R). \tag{3.1}$$

Неравенства (2.1) и (3.1) доказывают наше утверждение (при этом мы пользуемся инвариантностью определения порядка относительно круговых областей).

2. В этом п. мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть* $g(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$ *и* $h(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$ – *целые трансцендентные функции порядков* $\rho(g)$ *и* $\rho(h)$ *соответственно, причем* $\rho(g)<\rho(h)$. *Тогда порядок* $\rho(f)$ *произведения*

$$f(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)=g(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)\,h(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$$

равен порядку функции $h(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$, *т. е.* $\rho(f)=\rho(h)$ (*порядок* $\rho(g)$ *принимается конечным*).[1]

Доказательство. Мы ограничиваемся случаем конечного порядка $\rho(h)$. Видоизменения в случае бесконечного порядка $\rho(h)$ незначительны и очевидны.

По определению, данному в п. 1, порядок $\rho(h)$ функции $h(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$ совпадает с порядком функции $M(R,\ h)$. Определим по данному числу $\varepsilon>0$, $3\varepsilon<\rho(h)-\rho(g)$ значение $\tilde{R}_0$ так, чтобы

$$\tilde{R}_0^{-\frac{\varepsilon}{\rho(h)-2\varepsilon}}<\frac{1}{2}. \tag{1.2}$$

[1]Факт, по-видимому, не новый.

В силу построения функции $M(R, h)$ для данных чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдутся такое сколь угодно большое значение $R_0 > \tilde{R}_0$ и такие числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что

$$\exp R_0^{\rho(h)-\varepsilon} < M(R_0, h) < m(R_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, h) + \delta = m(R_0, A, h) + \delta, \tag{2.2}$$

Зафиксируем числа ε, δ, R_0 и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и рассмотрим произведение

$$f(z, A) = g(z, A)\,h(z, A); \quad A = (A_1, A_2, \ldots, A_n),$$

Функция $g(z, A)$ является целой функцией одного переменного. Как известно (см. [2] стр. 33) вне конечного числа исключительных кружков в круге $|z| < R$; $R > R_0$ с суммой длин радиусов $4\eta R$, где $\eta > 0$ — произвольное число,

$$\ln|g(z, A)| > -H(\eta)\ln m(eR, A, g),$$

причем $H(\eta) = 2 + \ln\dfrac{3e}{2\eta}$.

Функция $M(R, A, h)$ — возрастающая. Поэтому ее график при $R > R_0$ находится выше прямой l, параллельной оси абсцисс в плоскости $\big(R, M(R)\big)$ и проходящей через точку $(R_0, \exp R_0^{\rho(h)-\varepsilon} - \delta)$. Неравенство

$$m(R, A, h) < \exp R^{\rho(h)-2\varepsilon}$$

окажется возможным при $R > R_0$ лишь в том случае, если найдется такое значение R_1, что

$$m(R_1, A, h) = \exp R_1^{\rho(h)-2\varepsilon}, \quad R_1 > R_0.$$

Разность $R_1 - R_0$ нетрудно оценить из того соображения, что график функции $M = m(R, A, h)$ будет выше прямой l и, следовательно, в точке R_1 кривая $M = m(R, A, h)$ будет выше точки пересечения прямой l с графиком уравнения $M = \exp R^{\rho(h)-2\varepsilon}$. Таким образом из равенства

$$e^{\tilde{R}^{\rho(h)-2\varepsilon}} = e^{R_0^{\rho(h)-\varepsilon}} - \delta = e^{R_0^{\rho(h)-\varepsilon}}\Big(1 - \delta\exp(-R_0^{\rho(h)-\varepsilon})\Big) = e^{R_0^{\rho(h)-\varepsilon}} \quad \Big(1 + o(1)\Big)$$

находим

$$\tilde{R} = R_0^{1 + \frac{\varepsilon}{\rho(h)-2\varepsilon}} + O(1)$$

и

$$R_1 - R_0 > \tilde{R} - R_0 > R_0^{1 + \frac{\varepsilon}{\rho(h)-2\varepsilon}}\Big(1 - R_0^{-\frac{\varepsilon}{\rho(h)-2\varepsilon}}\Big).$$

Числа ε и δ фиксированы, а число R_0 удовлетворяет неравенству (1.2). Поэтому $R_1 - R_0 > \dfrac{1}{2} R_0$ и при $R_0 \leqslant R \leqslant \dfrac{3}{2} R_0$

$$M(R, A, h) > \exp R^{\rho(h)-2\varepsilon} - \delta.$$

При $\eta = \dfrac{1}{R_0^2}$ сумма длин радиусов исключительных кружков в круге $|z| < 2R_0$ равна $\dfrac{8}{R_0}$ и в интервале $\left(R_0, \dfrac{3}{2} R_0\right)$ найдутся окружности $|z| = R$, не пересекающие ни одного исключительного кружка. При этом $H(\eta) = 2 + \ln\dfrac{3}{2}e + 2\ln R_0$.

Из всего сказанного вытекает следующая оценка:

$$\ln m(\bar{R},\ A,\ f) \geqslant -H(\eta)\ln m(3\bar{R},\ A,\ g)+\ln m(R,\ A,\ h) >$$

$$> -\left(2+\ln\frac{3}{2}e+2\ln\bar{R}\right)(3\bar{R})^{\rho(g)+\varepsilon}+R^{\rho(h)-2\varepsilon}-\delta=$$

$$=\bar{R}^{\rho(h)-2\varepsilon}\left[1-\left(2+\ln\frac{3}{2}e+2\ln\bar{R}\right)3^{\rho(g)+\varepsilon}\bar{R}^{\rho(g)-\rho(h)+3\varepsilon}-\delta\bar{R}^{-\rho(h)+2\varepsilon}\right].$$

Отсюда выводим в силу очевидного неравенства

$$\ln M(\bar{R},\ f) \geqslant \ln m(\bar{R},\ A,\ f)$$

и произвольности ε, что $\rho(f) \geqslant \rho(h)$. Обратное неравенство тривиально, так как

$$M(R,\ f) \leqslant M(R,\ g)\,M(R,\ h).$$

Теорема доказана.

§ 2

3. Как хорошо известно, логарифм максимума модуля аналитической функции одного комплексного переменного является выпуклой функцией от $\ln r$, $|z|=r$. Максимум модуля целой функции многих комплексных переменных ведет себя по разному в зависимости от способа исчерпания пространства. Так например, если пространство нeременных $(z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n)$ $z_j=x_j+iy_j$; $|z_j|=r_j$; $j=1,\ 2,\ \dots,\ n$ исчерпать гиперсферами $S(R)$ $\sum_{j=1}^{n} r_j^2=R^2$ то логарифм функции

$$M(R)=\max_{S(R)}|F(z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n)|$$

является выпуклой функцией от $-R^{-2}$ (см. [5]). Если же пространство исчерпать с помощью полицилиндров $C(R): |z_j| \leqslant R: j=1,\ \dots,\ n$ то логарифм функции

$$\max_{C(R)}|F(z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n)|=M(R,\ C)$$

является выпуклой функцией от $\ln R$. В самом деле, функция

$$F^*(z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n)=\frac{F(z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n)}{z_1^{\alpha}}$$

является аналитической функцией в замкнутой области $0 \leqslant R_1 \leqslant |z_j| \leqslant R_2$; $j=1,\ 2,\ \dots,\ n$ (хотя и не однозначной) и максимум модуля функции $|F^*(z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n)|$ в этой области достигается на границе, так что можно подобрать такое положительное число α, что

$$\frac{M(R_1,\ C)}{R_1^{\alpha}}=\frac{M(R_2,\ C)}{R_2^{\alpha}}$$

и

$$\frac{M(R,\ C)}{R^{\alpha}} \leqslant \frac{M(R_1,\ C)}{R_2^{\alpha}}.$$

С помощью этого неравенства, обычным приемом (см. например [4] и следующий п. 4) легко доказать наше утверждение.

4. Нашей целью является выделение одного класса исчерпаний пространства, для которых соответствующие максимумы модуля целой аналитической функции обладали свойствами выпуклости, аналогичными приведенным выше.

Рассмотрим семейство круговых поверхностей $S(R)$, заданное уравнениями

$$r_j = R\rho_j(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}); \qquad j=1, 2, \ldots, n, \tag{1.4}$$

определенными в некоторой области Δ. Мы предполагаем, что все функции $\rho_j(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ имеют непрерывные частные производные второго порядка в замкнутой области $\bar{\Delta}$, и что ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial\rho_1}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial\rho_1}{\partial v_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\rho_n}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial\rho_n}{\partial v_{n-1}} \end{matrix} \right\| \tag{2.4}$$

в $\bar{\Delta}$ равен $n-1$, и что там же определитель

$$D = \left\| \begin{matrix} \rho_1 & \ldots & \rho_n \\ \frac{\partial\rho_1}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial\rho_n}{\partial v_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\rho_1}{\partial v_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial\rho_n}{\partial v_{n-1}} \end{matrix} \right\| \neq 0. \tag{2'.4}$$

Пусть $u = F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — целая функция и

$$M(R) = \max_{S(R)} |F(z_1, z_2, \ldots, z_n)|. \tag{3.4}$$

В силу наложенных на функции ρ_j условий мы можем рассматривать R как дважды непрерывно дифференцируемую функцию от r_j; $j=1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим поближе функцию

$$H(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{|F(z_1, z_2, \ldots, z_n)|}{\psi(R)},$$

где $\psi(R)$ также предполагается дважды непрерывно дифференцируемой функцией от R, которая пока что не определена. Функция $\ln|F(z_1, z_2, \ldots, z_n)|$ является гармонической функцией в окрестности точки, в которой достигается равенство (3.4), так как $M(R) > 0$, т. е. (полагая $z_j = z_j e^{i\varphi_j}$):

$$\Delta \ln|F| = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j^2}\left(\frac{\partial^2 \ln|F|}{\partial\varphi_j^2} + r_j^2 \frac{\partial^2 \ln|F|}{\partial r_j^2} + r_j \frac{\partial \ln|F|}{\partial r_j}\right) = 0.$$

Вычислим выражение $\Delta \ln\psi(R)$. Имеем из (1.4)

$$0 = \frac{\partial R}{\partial r_p}\rho_j + R\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial\rho_j}{\partial v_s}\frac{\partial v_s}{\partial r_p}; \qquad j \neq p,$$

$$1 = \frac{\partial R}{\partial r_p}\rho_p + R\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial\rho_p}{\partial v_s}\frac{\partial v_s}{\partial r_p}.$$

Обозначим алгебраическое дополнение, соответствующее p-му члену q-ой строки определителя D через D_{qp}. Тогда

$$\frac{\partial R}{\partial r_p} = \frac{D_{1p}}{D}; \quad p=1, 2, \ldots, n; \quad \frac{\partial v_s}{\partial r_p} = \frac{D_{sp}}{RD}; \quad s=1, 2, \ldots, n$$

и

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r_p^2} = \frac{\partial}{\partial r_p}\left(\frac{D_{1p}}{D}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial v_k}\left(\frac{D_{1p}}{D}\right)\frac{D_{kp}}{RD} = \frac{1}{RD}\sum_{k=1}^{n-1} D_{kp}\frac{\partial}{\partial v_k}\left(\frac{D_{1p}}{D}\right).$$

Следовательно,

$$\Delta \ln \psi(R) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{r_p^2}\left(r_p^2 \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial r_p^2} + r_p \frac{\partial \ln \psi}{\partial r_p}\right) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n}\left\{ r_p^2 (\ln \psi)'' \left(\frac{\partial R}{\partial r_p}\right)^2 + (\ln \psi)' \left[r_p \frac{\partial R}{\partial r_p} + r_p^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r_p^2}\right]\right\} \frac{1}{r_p^2} =$$

$$= \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{D_{1p}}{D}\right)^2 (\ln \psi)'' \frac{1}{r_p^2} + \sum_{p=1}^{n}\left\{ \frac{1}{R}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_{kp}}{D} \frac{\partial}{\partial v_k}\left(\frac{D_{1p}}{D}\right) + \frac{1}{r_p}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{D_{kp}}{D}\right\}(\ln \psi)'. \quad (4.4)$$

Отсюда получаем, что

$$\Delta \ln H = -\Delta \ln \psi.$$

Из того, что $\Delta v = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2}\right)$, следует:

если функция $\psi(R)$ такова, что выражение

$$\Delta \ln \psi \leqslant 0, \quad (5.4)$$

то функция $\ln H$ (вместе с ней и функция H) достигает свой максимум в замкнутой области, ограниченной гиперповерхностями $S(R_1)$ и $S(R_2)$; $R_1 < R_2$ на границе.

Из приведенных соображений следует предложение:

если существует такая функция $\psi(R)$, удовлетворяющая неравенству (5.4), что при некотором положительном α

$$\frac{M(R_1)}{\psi^\alpha(R_1)} = \frac{M(R_2)}{\psi^\alpha(R_2)},$$

то $\ln M(R)$ является выпуклой функцией от $\ln \psi(R)$.

Действительно, при этих условиях, какое бы не было значение $R: R_1 \leqslant R \leqslant R_2$,

$$\frac{M(R)}{\psi^\alpha(R)} \leqslant \frac{M(R_1)}{\psi^\alpha(R_1)}, \quad (6.4)$$

так что

$$\ln M(R) \leqslant \ln M(R_1) - \alpha \ln \psi(R_1) + \alpha \ln \psi(R).$$

Кроме того,

$$\ln M(R_1) - \alpha \ln \psi(R_1) = \ln M(R_2) - \alpha \ln \psi(R_2)$$

и

$$\alpha = \frac{\ln M(R_2) - \ln M(R_1)}{\ln \psi(R_2) - \ln \psi(R_1)}.$$

Подставив это значение α в соотношение (6.3), найдем:

$$\ln M(R) \leqslant \frac{[\ln \psi(R_2) - \ln \psi(R)] \ln M(R_1) + [\ln \psi(R) - \ln \psi(R_1)] \ln M(R_2)}{\ln \psi(R_1) - \ln \psi(R_2)},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что при этих условиях выражения $\psi(R)$ и $\frac{\psi'}{\psi} \frac{M'}{M}$ возрастают. Последнее свойство удобно в приложениях.

Практическое выражение R через v_i часто затруднительно. Но если выбрать $\ln \psi(R) = -R^{-\beta}$; $\beta > 0$ или $\psi(R) = R$ (разумеется, если это возможно; на практике это наиболее часто используемые функции), то это затруднение отпадает, так как для определения знака в (5.4), как это видно из (4.4), R не играет никакой роли (после вынесения за скобки множителя

$\frac{1}{R^{3+2}}$ или $\frac{1}{R^2}$, в скобках остается выражение, которое от R явно не зависит).

5. Рассмотрим два примера (случай полицилиндров был приведен выше).

а) Пространство исчерпывается круговыми гиперповерхностями

$$r_1^m + r_2^m + \ldots + r_n^m = R^m, \qquad m > 0.$$

Простые вычисления дают

$$\frac{\partial R}{\partial r_i} = \left(\frac{r_j}{R}\right)^{m-1};$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r_j^2} = (m-1)\left(\frac{r_j}{R}\right)^{m-2} \frac{R - r_j \frac{\partial R}{\partial r_j}}{R^2} = (m-1)\left[\frac{r_j^{m-2}}{R^{m-1}} - \frac{r_j^{2m-2}}{R^{2m-1}}\right];$$

$$\Delta \ln \psi(R) = \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j^{2m}}{R^{2m-2}} (\ln \psi)'' + \left[m \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j^m}{R^{m-1}} - (m-1) \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j^{2m}}{R^{2m-1}}\right] (\ln \psi)'.$$

Положим $\ln \psi = -R^{-\beta}$; $(\ln \psi)' = \beta R^{-(\beta+1)}$; $(\ln \psi)'' = -\beta(\beta+1) R^{-(\beta+2)}$. Тогда

$$\Delta \ln \psi = -\frac{\beta(\beta+1)}{R^{2m+\beta}} \sum_{j=1}^{n} r_j^{2m} + \beta\left[mR - \frac{m-1}{R^{2m-1}} \sum_{j=1}^{n} r_j^{2m}\right] \frac{1}{R^{\beta+1}} =$$

$$= -\frac{\beta}{R^{2m+\beta}}\left[(m+\beta) \sum_{j=1}^{n} r_j^{2m} - m R^{2m}\right].$$

При $\beta = m(n-1)$

$$\Delta \ln \psi = -\frac{m^2 (n-1)}{R^{m(n+1)}}\left[n \sum_{j=1}^{n} r_j^{2m} - R^{2m}\right] \leqslant 0.$$

Чтобы убедиться в справедливости последнего неравенства, рассмотрим выражение

$$\eta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n \sum_{j=1}^{n} x^2$$

при $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$; $0 \leqslant x_j \leqslant 1$. Расстояние гиперплоскости $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ от начала координат равно $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Поэтому гиперсфера $n \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1$ имеет лишь одну общую точку $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ с этой гиперплоскостью. Все другие точки рассматриваемой плоскости лежат вне указанной гиперсферы и поэтому на рассматриваемой гиперплоскости имеет место неравенство $n \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \geqslant 1$, это мы утверждали.

Итак, *логарифм максимума модуля $M(R)$ произвольной целой функции $u = F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ на рассматриваемых гиперповерхностях является выпуклой функцией от $-R^{-m(n-1)}$ и функция*

$$R^{(n-1)m+1} \frac{M'(R)}{M(R)}$$

возрастает. При $m = 2$ и $n = 2$ возрастает выражение $\frac{R^3 M'(R)}{M(R)}$ (см. [5]).

б) Пространство переменных (z, w) исчерпывается областями, ограниченными гиперповерхностями А. А. Темлякова:

$$\begin{cases} r = Rr_1(\tau); \\ \rho = R\rho_1(\tau), \end{cases}$$

$$\rho_1(\tau) = e^{-\int\limits^{\tau} \frac{\tau}{1-\tau} d\ln r_1(\tau)};$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant 1; \quad r_1(0) = 0; \quad r_1'(\tau) > 0; \quad 0 < r_1'(\tau) \leqslant \frac{r_1(\tau)}{\tau}.$$

Функция $r_1(\tau)$ предполагается непрерывной в сегменте $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, производная $r_1'(\tau)$ — в полусегменте $0 < \tau \leqslant 1$. Дополнительно мы требуем выполнения условия $\operatorname{Inf}\left(\tau r_1'(\tau) : r(\tau)\right) = a > 0$; $0 < \tau \leqslant 1$.

Имеем:

$$\frac{\partial R}{\partial r} r_1 + Rr_1' \frac{\partial \tau}{\partial r} = 1;$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} \rho_1 + R\rho_1' \frac{\partial \tau}{\partial r} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{\rho_1}{R(r_1'\rho_1 - \rho_1' r_1)}; \quad \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\rho_1'}{r_1\rho_1' - \rho_1 r_1'}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial \tau}{\partial \rho} = -\frac{r_1}{R(r_1'\rho_1 - \rho_1' r_1)}; \quad \frac{\partial R}{\partial \rho} = -\frac{r_1'}{r_1\rho_1' - \rho_1 r_1'}.$$

Но $(1-\tau) r_1 \rho_1' = -\tau \rho_1 r_1'$.

Таким образом,

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{1}{R} \frac{1-\tau}{r_1'}; \quad \frac{\partial R}{\partial r} = R\frac{\tau}{r};$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \rho} = \frac{1}{R} \frac{\tau}{\rho_1'}; \quad \frac{\partial R}{\partial \rho} = R\frac{1-\tau}{\rho}.$$

Далее

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = \frac{R}{r^2} \tau(1-\tau) + \frac{1}{R} \frac{1-\tau}{r_1 r_1'};$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} = -\frac{R}{\rho^2} \tau(1-\tau) - \frac{1}{R} \frac{\tau}{\rho_1 \rho_1'}$$

и, как легко подсчитать,

$$\Delta \ln \psi = R^2 [\tau^2 + (1-\tau)^2] (\ln \psi)'' + R\left[2\frac{r_1}{r_1'}(1-\tau) + 1\right](\ln \psi)'.$$

Пусть $\ln \psi = -R^{-\beta}$; $(\ln \psi)' = \beta R^{-(\beta+1)}$; $(\ln \psi)'' = -\beta(\beta+1) R^{-(\beta+2)}$. Тогда

$$\Delta \ln \psi = -\frac{\beta(\beta+1)}{R^\beta}\left(\tau^2 + (1-\tau)^2\right) + \frac{\beta}{R^\beta}\left[2\frac{r_1}{r_1'}(1-\tau) + 1\right] =$$

$$= -\frac{\beta r_1}{R^\beta r_1' \tau}\left\{\beta\left(\tau^2 + (1-\tau)^2\right)\frac{\tau r_1'}{r_1} - 2\tau(1-\tau)\left[\frac{\tau r_1'}{r_1} + 1\right]\right\} \leqslant -\frac{\beta r_1}{R^\beta r_1' \tau}\left(\frac{a\beta}{2} - 1\right).$$

Итак при $\beta = \frac{2}{a}$ $\Delta \ln \psi \leqslant 0$ *и* $\ln M(R)$ *является выпуклой функцией от* $-R^{-\frac{2}{a}}$, *причем выражение* $R^{\frac{2}{a}+1} M'(R)/M(R)$ *возрастает.*

Заметим, что в обоих примерах найденное значение β уменьшить нельзя.

§ 3

6. Рассмотрим в пространстве переменных $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ семейство $S(R)$ круговых гиперповерхностей, заданных в замкнутой области $\bar{D}$ параметрическими уравнениями

$$r_j = R\rho_j(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}); \quad \rho_j \geqslant 0; \quad (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) \in \bar{D},$$

$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

где функции $\rho_j(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ – аналитические в $\bar{D}$. Граница Γ области D предполагается гладкой, за исключением конечного числа „рёбер" и „вершин". При этом в окрестности гладкой точки граница Γ определяется связью

$$P_{n-2}(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) = 0 \quad \text{с} \quad \sum_{j=1}^{n-1} \left| \frac{\partial p_{n-1}}{\partial v_j} \right| > 0.$$

$n-j$-мерным ребром $(3 \leqslant j \leqslant n-1)$ мы называем гиперповерхность $n-j$ размерности, принадлежащей границе Γ, не являющейся гладкой ни в каком $n-j+2$-мерном подпространстве, но оказывающейся таковой в некотором $n-j+1$ подпространстве. В некоторой окрестности всякой внутренней точки ребра, последнее определяется связями

$$p_{n-k}(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots, j,$$

причем все $j-2$ функций $p_{n-k}(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ являются аналитическими и независимыми в рассматриваемой окрестности с матрицей частных производных ранга $j-2$. Вершиной мы называем нульмерное ребро. Очевидно, в вершине никакой размерности касательные не существуют (в изложенном выше смысле).

Пример. Гиперповерхность

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = 1; \quad r_j \geqslant 0; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

является гладкой при $r_j > 0$. Двухмерными ребрами являются гиперповерхности, определяемые равенствами

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = 1; \quad r_j = 0; \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad r_k \geqslant 0, \quad k \neq j.$$

Одномерными ребрами (т. е. кривыми) являются следующие:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = 1; \quad r_j = 0; \quad r_k = 0; \quad r_p \geqslant 0; \quad j, k = 1, 2, 3, 4; \quad p \neq j, k; \quad j \neq k.$$

Вершинами суть точки (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0).

7. Пусть области, ограниченные гиперповерхностями $S(R)$, исчерпывают пространство при $R \to \infty$. Предположим, что максимум модуля $M(R)$ целой функции $u = F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ на гиперповерхности $S(R)$ достигается во внутренней точке $(n-j)$-мерного ребра (в частности, области D). Нетрудно

видеть, что при любом R_0 существует точка максимума, которая является предельной для множества точек максимума, при $R \neq R_0$. В дальнейшем мы рассматриваем только такие точки, не оговаривая этого особо. По условиям, изложенным в п. 6, в окрестности изучаемой точки максимума $(v_1^0, \ldots, v_{n-1}^0, \varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0)$; $v_k^0 + v_k(R_0)$; $\varphi_j^0 = \varphi_j(R_0)$ уравнения связей $p_{n-i}(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) = 0$; $i = 2, 3, \ldots, j$, могут быть разрешены относительно $j-2$ переменных, скажем для определенности, переменных $v_{n-j+2}, v_{n-j+3}, \ldots, v_{n-1}$. Подставив эти значения в функцию

$$H = H\Big(R\rho_1(v_1, \ldots, v_{n-j+1}), \ldots R\rho_n(v_1, \ldots, v_{n-1}), \varphi_1, \ldots, \varphi_n\Big);$$

$$F = u + iv; \quad H = u^2 + v^2; \quad z_j = r_j e^{i\varphi_j}, \tag{1.7}$$

получим аналитическую функцию переменных

$$H = H\Big(R\tilde{\rho}_1(v_1, \ldots, v_{n-j+1}), \ldots R\tilde{\rho}_n(v_1, \ldots, v_{n-j+1}), \varphi_1, \ldots, \varphi_n\Big). \tag{2.7}$$

Так как точка $(v_1^0, \ldots, v_{n-j+1}^0, \varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0)$; $R = R_0$, является по предположению точкой максимума для функции (2.7), то имеет место условие стационарности:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial r_j} \frac{\partial \tilde{\rho}_j}{\partial v_s} = 0; \qquad s = 1, 2, \ldots, n-j+1; \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi_l} = 0; \qquad t = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.7}$$

Следует отличить два возможных случая.

а) Точка $P_0(v_1^0, \ldots, v_{n-1}^0, \varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0)$ является предельной точкой для множества точек максимума, принадлежащих данному ребру при различных значениях R сколь угодно близких к R_0.

В этом случае система (3.7) — (4.7) имеет действительные решения в окрестности точек P_0 относительно R. Система (3.7) — (4.7) всегда может быть сведена к системе псевдополиномов, равных нулю, предварительно, в случае необходимости, введя неособое линейное преобразование с постоянными коэффициентами ([7], стр. 142). Исключив из последней системы уравнений со псевдополиномами переменное, относительно которого названные псевдополиномы являются многочленами, приведем полученную в силу этого действия систему уравнений опять к системе со псевдополиномами. Последовательно повторив этот процесс, в конце концов придем к одному уравнению вида

$$T = A_0 v_t^m + A_1 v_t^{m-1} + \ldots + A_m = 0; \tag{5.7}$$

где $A_s = A_s(v_{n_1}, \ldots, v_{n_p}, R)$ (для удобства переменные φ_j обозначены через v с индексами) — аналитические функции своих переменных в некоторой окрестности точки (Q_0, R_0), $Q_0 = (v_{n_1}^0 v_{n_2}^0, \ldots, v_{n_p}^0)$. В окрестности последней точки (достаточно малой) уравнение (5.7) имеет конечное число решений

$$v_{tl} = v_{tl}(v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_p}, R); \quad n_j \neq t; \quad l = 1, 2, \ldots, q; \quad q \leqslant m.$$

Если какое-либо решение действительно при всех значениях $v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_p}, R$ из рассматриваемой окрестности точки (Q_0, R_0), то мы полагаем $v_{n_j} \equiv v_{n_j}^0$; $j = 1, 2, \ldots, p$, в итоге чего получим решение уравнения (5.7), зависящее только от R. Если данное решение, вообще говоря, комплексно, но при определенных значениях $v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_p}, R$ решения действительны, то для нахождения этих действительных решений к уравнению (5.7) добавляется уравнение $\frac{\partial T}{\partial v_t}=0$. Это позволяет тем же путем, как указано выше, получить новое уравнение с меньшим числом переменных, с решениями которого мы проводим те же операции, как с решениями уравнения (5.7). Эти операции мы проводим до тех пор, пока не будут получены все действительные решения уравнения (5.7). Затем возвращаясь последовательно к уравнениям, полученным в процессе исключения переменных, найдем все действительные решения системы (3.7)–(4.7), которые в некоторой окрестности точки R_0 имеют вид:

$$v_j=v_j(R);\quad \varphi_s=\varphi_s(R);\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где функции $v_j(R)$, $\varphi_s(R)$ — аналитические функции от R, как решение системы (3.7)–(4.7) при $v_{n_j}\equiv v^0_{n_j}\equiv\text{const}$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ p$, в некотором интервале $|R-R_0|<h$, за исключением, быть может, самой точки R_0, в которой возможна алгебраическая особенность. Число таких решений конечно.

Выбор постоянных значений для $v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_p}$ в уравнении (5.7) основано на том соображении, что в точках решения системы (3.7)–(4.7) функция $H=H(R,\ v_1,\ \ldots,\ v_{n-1},\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n)$ от независимых значений параметров $v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_p}$ не зависит. Покажем это.

Уравнение (5.7) разобьем на систему уравнений с неприводимыми псевдополиномами. Рассмотрим последовательно решения каждого из равенств этой системы. Если рассматриваемый псевдополином первой степени, то решение соответствующего уравнения аналитично. Если же уравнение степени выше первой, то мы исключаем из рассмотрения окрестности точки $(Q_0,\ R_0)$ пространства $(v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_p}, R)$ те точки, координаты которых удовлетворяют его дискриминантному уравнению (последнее не есть тождество и не противоречиво, так как псевдополином в нашем уравнении неприводим). Как известно, после исключения из окрестности точки $(Q_0,\ R_0)$, в которой рассматриваются решения уравнения (5.7), указанные точки, мы получаем область ([7], стр. 143). Обозначим ее через D_1. В области D_1 изучаемое уравнение имеет конечное число аналитических решений. Затем мы переходим к уравнению со псевдополиномом относительно v_k, полученному в процессе исключения переменных из системы (3.7)–(4.7) с независимыми переменными $v_{t_1}, v_{n_1}, \ldots, v_{n_p}, R$ и только этих. В области D_1 мы можем заменить v_t через его решение из предыдущего уравнения, после чего получаемое уравнение относительно v_{n_j}, R — такое же, как и (5.7). Продолжая те же операции с новым уравнением, как мы это проделали с уравнением (5.7), найдем некоторую область D_2, в которой это уравнение имеет конечное число аналитических решений (исключены точки соответствующих дискриминантных уравнений). Нетрудно видеть, что после конечного числа шагов мы найдем некоторую область D_0 в окрестности точки $(Q_0,\ R_0)$, в которой все решения системы (3.7)–(4.7) аналитичны.

Исключены из окрестности (Q_0, R_0) все точки решений дискриминантных уравнений, выводимых последовательно. Пусть этими решениями будут функции

$$v_l = v_l(v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_p}, R), \quad l \neq n_j, \quad j=1, 2, \ldots, p,$$

являющиеся аналитическими в области D_0 от переменных v_{n_j}; R; $j=1, 2, \ldots, p$. Подставив одно такое решение в H и продифференцировав по v_{n_j}, получим в силу (3.7) – (4.7):

$$\frac{\partial H}{\partial v_{n_k}} = R \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial r_j} \frac{\partial \rho_j}{\partial v_{n_k}} + \sum_{\substack{l \neq n_t \\ t=1,2,\ldots,p}} \sum_{j=1}^{n} R \frac{\partial H}{\partial r_j} \frac{\partial \rho_j}{\partial v_l} \frac{\partial v_l}{\partial v_{n_k}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial v_{n_k}} \equiv 0,$$

т. е. функция H от v_{n_j}, $j=1, 2, \ldots, p$ не зависит. Из непрерывности функции и непрерывной зависимости корней, преобразованной в систему уравнений со псевдополиномами, системы (3.7) – (4.7) от ее коэффициентов следует также независимость H от v_{n_j} и в исключенных точках-решениях дискриминантных уравнений. Для простоты мы выбираем $v_{n_j} \equiv v_{n_j}^0$; $j=1, 2, \ldots, p$.

Далее, опираясь на систему (3.7) – (4.7), найдем в некоторой окрестности точки R_0, за исключением, возможно, самой точки R_0

$$\frac{\partial H}{\partial R} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial r_j} \left(R \frac{\partial \rho_j}{\partial v_i} v_i'(R) + \rho_j \right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial \varphi_j} \varphi_j'(R) = \sum_{j=1}^{n} \rho_j \frac{\partial H}{\partial r_j}$$

и

$$R \frac{\partial H}{\partial R} = \sum_{j=1}^{n} r_j \frac{\partial H}{\partial r_j}. \tag{7.7}$$

Переходом к пределу мы убеждаемся в том, что и в точке R_0 верно соотношение (7.7). Заметим при этом, что производная $\frac{\partial H}{\partial R}$ в рассматриваемой окрестности точки R_0 существует.

б) Точка P_0 изолированная на ребре. Это означает, что P_0 является предельной для множества E стационарных точек максимума, принадлежащих ребрам большей размерности, чем то, на котором лежит точка P_0. Так как число рёбер конечно, то найдется такое ребро большей размерности, чем первоначальное, на котором соответствующее подмножество $E_0 \subseteq E$ плотно, причем P_0 есть предельная точка для E_0. Для точек множетва E_0 имеет место равенство (7.7). Переход к пределу в точке P_0 доказывает равенство (7.7) и в точке P_0.

Заметим, что равенство (7.7) будет верно и в том случае, если вершина гиперповерхности есть точка максимума для изолированного значения R_0.

8. В вершине гиперповерхности все значения $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ постоянны. Если вершина оказывается точкой максимума для множетва значений $\{R_j\}$ с предельной точкой в R_0, то либо R_j изолированы и для них справедливо соотношение (7.7), которое по непрерывности будет верно и в точке R_0, либо множество $\{R_j\}$ плотно в некоторой окрестности точки R_0. Во всех этих точках имеет место равенство (4.7) и, по непрерывности, (4.7) удов-

летворится во всякой точке указанной окрестности $|R-R_0|<h$. Дальнейшие рассуждения сводятся к рассмотренным в п. 7.

Точно так же, как и в [3], можно показать, что функция $M(R)$ может иметь на конечном отрезке не более чем конечное число точек, в которых отсутствуют производные, причем всегда существуют конечные односторонние производные.

Кроме того, множество точек, в которых достигается максимум $M(R)$ функции $|F(z_1, z_2, \ldots, z_n)|$ на соответствующих гиперповерхностях $S(R)$ при $0 \leqslant R \leqslant R_1 < \infty$ (R_1 — любое конечное число) состоит из конечного числа кривых вида (6.7). Следовательно, в любой точке R всегда выполняется равенство

$$2MM' = \frac{\partial H}{\partial R}, \tag{1.8}$$

где в случае необходимости, вместо производной надо подразумевать одностороннюю производную.

Простой подсчет показывает (см. [5]), что в точке максимума $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$

$$\frac{\zeta_j \frac{\partial F}{\partial z_j}}{F} = \frac{r_j\left(u\frac{\partial u}{\partial r_j} + v\frac{\partial v}{\partial r_j}\right)}{u^2+v^2}$$

и

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\zeta_m \frac{\partial F}{\partial z_m}}{F} = \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j \frac{\partial H}{\partial r_j}}{2H} = \frac{R\frac{\partial H}{\partial R}}{2H}.$$

Далее в силу (1.8)

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\zeta_j \frac{\partial F}{\partial z_j}}{F} = \frac{RM'(R)}{M(R)}. \tag{2.8}$$

Сравнив (2.8) с теоремой Вимана-Валирона в [6], мы приходим к следующей теореме.

Теорема. *Для целых трансцендентных функций n комплексных переменных $u = F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ верно соотношение*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{RM'(R)}{\nu(R)\,M(R)} = 1, \tag{3.8}$$

где $M(R) = \max|u|$ на поверхности $S(R)$, определенной в п. 6.

При переходе к пределу в (3.8) *следует, быть может, исключить множество интервалов оси R конечной логарифмической меры. Здесь $\nu(R)$ есть центральный индекс ряда*

$$h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j z^j,$$

где $A_j = \max\limits_{S(R)} |A_j(z_1, z_2, \ldots, z_n)|$ и $A_j(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ суть однородные полиномы степени j и являются членами диагонального разложения функции

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

В частном случае, когда $S(R)$ есть полицилиндры $|z_j|=R$ в соответствии с § 2, функция $\ln M(R)$ есть выпуклая функция от $\ln R$ и, кроме того, удовлетворяет соотношениям (2.8) и (3.8). Это поведение есть полный аналог поведению максимума модуля целой трансцендентной функции одного комплексного переменного.

Замечание. Выполнение свойств, изложенных в п. 6, достаточно потребовать лишь для той части гиперповерхности, в точках которой модуль всякой аналитической функции достигает свой максимум (граница Шилова).

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
18. XII. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гольдберг. Элементарные замечания о формулах для определения порядка и типа целой функции многих комплексных переменных, ДАН Арм. ССР, т. XXIX, 4, 1959, 145—151.
2. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., 1956.
3. Ш. И. Стрелиц. О максимальных модулях аналитических функций, УМН, т. X, вып. 4(66), 1955, 153—160.
4. Ш. И. Стрелиц. О росте неоднозначных решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков. Мат. сб., 53(95): 2, 1961, 159—194.
5. Ш. И. Стрелиц. О максимуме модуля аналитической функции многих переменных. Мат. сб., 57 (99): 3, 1962, 282—296.
6. Ш. И. Стрелиц. Теорема Вимана—Валирона для целых функций многих комплексных переменных. Мат. сб., 58 (100): 1, 1962, 47—64.
7. Б. А. Фукс. Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М.-Л., 1948.

KAI KURIOS DAUGELIO KINTAMŲJŲ ANALIZINIŲ FUNKCIJŲ MODULIO MAKSIMUMO SAVYBĖS

Š. STRELICAS

(Reziumė)

Straipsnyje nagrinėjamos kai kurios paprastos daugelio kintamųjų sveikų funkcijų modulio maksimumo savybės priklausomai nuo erdvės išsėmimo būdo.

EINIGE EIGENSCHAFTEN DES MAXIMALEN BETRAGES ANALYTISCHER FUNKTIONEN MEHRERER KOMPLEXER VERÄNDERLICHEN

S. STRELIZ

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir einige einfache Eigenschaften des absoluten Betrages ganzer Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen in ihrer Abhängigkeit von der Ausschöpfungsweise des Raumes.