III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1963

НОВЫЕ ТЕОРЕМЫ О СВОЙСТВАХ „ПОЧТИ НАВЕРНОЕ“ РЕАЛИЗАЦИЙ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. Г. АЛЕКСЕЕВ

1. Настоящая работа явилась результатом исследований, связанным с задачей о выделении случайного гауссовского сигнала на фоне случайного гауссовского шума. Одним из возможных подходов к нахождению достаточных условий возможности безошибочного выделения таких сигналов является использование теорем о свойствах „почти наверное“ реализаций гауссовских процессов, позволяющих установить ряд случаев, когда реализации „чистого шума“ и „суммы шума и сигнала“ с вероятностью 1 будут обладать разными свойствами. Некоторые полезные для этой цели теоремы о свойствах „почти наверное“ содержатся в работах Бэкстера [1], Козина [2], Гладышева [3] и автора [4] (см. также обзор Яглома [5]). Во всех этих работах основную роль играет функционал

$$u_n\left(\xi(t)\right)=\sum_{k=1}\left[\xi\left(\frac{k}{n}\right)-\xi\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]^2 \tag{1.1}$$

от реализации гауссовского случайного процесса $\xi(t)$, заданного на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$, и доказываемые теоремы о свойствах „почти наверное“ имеют характер „усиленных предельных теорем“, относящихся к поведению функционала $u_n\left(\xi(t)\right)$ при $n\to\infty$.

По предложению А. М. Яглома автор рассмотрел вопрос об усиленных предельных теоремах, относящихся к более общим функционалам, представляющим собой квадратичные формы от приращений процесса $\xi(t)$ на отрезках $\Delta t_j=\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$ $(j=1, 2, \ldots, n)$. Оказалось, что на этом пути удаётся получить ряд новых теорем о свойствах „почти наверное“ реализаций гауссовских процессов, позволяющих существенно расширить условия возможности выделения сигнала, указанные в работах [1–4]. Доказательству этих теорем и будет посвящена настоящая статья. Основные результаты работы были приведены без доказательства в заметке [6].

2. Все рассматриваемые в дальнейшем случайные процессы будут предполагаться вещественными процессами со стационарными гауссовскими приращениями и средним 0, имеющими спектральные плотности и заданными на отрезке $0\leqslant t\leqslant 1$. Спектральную плотность процесса $\xi(t)$ мы будем обозначать через $f_\xi(\lambda)$, а через $B_\xi(t)$ обозначим его структурную функцию

$$B_\xi(t)=\mathbf{M}\,|\,\xi(t)-\xi(0)\,|^2. \tag{2.1}$$

Рассмотрим разбиения отрезка [0, 1] на n равных отрезков Δt_j ($j=1$, $2, \ldots, n$). В дальнейшем нам будет удобно считать, что

$$n=3^m \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.2}$$

Пусть $A_n(\xi)=\| a_{jk}^{(n)}(\xi)\|$ — матрица ковариаций последовательных приращений процесса $\xi(t)$ на отрезках Δt_j. Тогда нетрудно показать, что

$$a_{jk}^{(n)}(\xi)=4\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k-j}{n}\lambda}\sin^2\frac{\lambda}{2n} f_\xi(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2}\left[B_\xi\left(\frac{k-j+1}{n}\right)-2B_\xi\left(\frac{k-j}{n}\right)+B_\xi\left(\frac{k-j-1}{n}\right)\right] \tag{2.3}$$

$$(j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и

$$\operatorname{Sp}\Big[\prod_{j=1}^{s} A_n(\xi_j)\Big]=2^{2s}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{s}\frac{\sin\dfrac{\lambda_j-\lambda_{j-1}}{2}}{\sin\dfrac{\lambda_j-\lambda_{j-1}}{2n}}\sin^2\frac{\lambda_j}{2n} f_{\xi_j}(\lambda_j)\,d\lambda_j \tag{2.4}$$

$$(\lambda_0=\lambda_s; \qquad s=2,\ 3,\ \ldots),$$

где $\operatorname{Sp} A$ — след матрицы A. Если условиться считать, что $\frac{\sin n0}{\sin 0}=n$, то формула (2.4) остается справедливой и при $s=1$. Нам понадобится также формула, выражающая $\operatorname{Sp} A_n(\xi) A_n(\eta)$ через структурные функции процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$:

$$\operatorname{Sp} A_n(\xi)\,A_n(\eta)=nB_\xi\left(\frac{1}{n}\right)B_\eta\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\left\{\left[B_\xi\left(\frac{j+1}{n}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2B_\xi\left(\frac{j}{n}\right)+B_\xi\left(\frac{j-1}{n}\right)\right]\left[B_\eta\left(\frac{j+1}{n}\right)-2B_\eta\left(\frac{j}{n}\right)+B_\eta\left(\frac{j-1}{n}\right)\right]\right\}. \tag{2.5}$$

В дальнейшем нас в первую очередь будет интересовать процесс $\eta(t)$, спектральная плотность которого может быть представлена в виде $f_\eta(\lambda)=$ $=f_\xi(\lambda)+f_\zeta(\lambda)$, где $f_\xi(\lambda)$ и $f_\zeta(\lambda)$ — неотрицательные функции, удовлетворяющие некоторым специальным условиям. Иначе говоря, мы будем рассматривать процесс $\eta(t)$, представимый в виде суммы некоррелирующих между собой процессов $\xi(t)$ и $\zeta(t)$, которые мы условно будем называть соответственно „шумом“ и „сигналом“. Ниже будут сформулированы некоторые теоремы, позволяющие безошибочно выделить случайный „сигнал“ $\zeta(t)$ на фоне „шума“ $\xi(t)$. При доказательстве этих теорем мы будем широко пользоваться теорией рядов Фурье (см., напр., Шилов [9] гл. VII, § 1, Бари [10] гл. I, § 47). Неоднократно будет использована теорема 1 § 4 работы Никольского [7], дающая оценки остатка сумм Фейера 2π— периодических функций при различных условиях гладкости. В дальнейшем изложении эту теорему мы будем называть просто теоремой Никольского.

3. Обозначим через x_n n-мерный вектор приращений процесса $\eta(t)$ на отрезках Δt_j ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$). Пусть, далее, $Q_\chi(x_n)=x_n' A_n(\chi)\,x_n$ — квадратичная форма относительно x_n, где $A_n(\chi)$ — матрица ковариаций приращений на отрезках Δt_j некоторого вспомогательного процесса $\chi(t)$ со спектральной плотностью $f_\chi(\lambda)$.

Теорема 1. *Пусть при больших* $|\lambda|$

$$f_\xi(\lambda) \leqslant \frac{c_1}{|\lambda|^{\alpha_1}} \tag{3.1}$$

и

$$f_\zeta(\lambda) = \frac{c_2}{|\lambda|^{\alpha_2}} + o\left(\frac{1}{|\lambda|^{\alpha_2}}\right), \tag{3.2}$$

где $2 \leqslant \alpha_1 + \frac{1}{2} = \alpha_2 \leqslant \frac{7}{2}$. *Тогда, если*

$$f_\chi(\lambda) = \frac{1}{|\lambda|^\beta} + o\left(\frac{1}{|\lambda|^\beta}\right), \tag{3.3}$$

где $\alpha_2 + \beta = 5$, *то с вероятностью* 1

$$\lim_{m\to\infty} \frac{4n^2}{4\pi \ln n} \Bigg\{ Q_\chi(x_n) - 16 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{\lambda_1}{2n} f_\xi(\lambda_1)\, d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2n}} \sin^2 \frac{\lambda_2}{2n} f_\chi(\lambda_2)\, d\lambda_2 \Bigg\} = c_2, \tag{3.4}$$

где n определяется соотношением (2.2).

Доказательство. Обозначим через $\varkappa_s$ и μ_s соответственно s-ый семиинвариант и s-ый центральный момент распределения квадратичной формы $Q_\chi(x_n)$. Тогда (см., напр., Гренандер и Сегё [11], раздел 11.5)

$$\varkappa_s = (s-1)!\, 2^{s-1} \operatorname{Sp} \{ [A_n(\xi) + A_n(\zeta)]\, A_n(\chi) \}^s \tag{3.5}$$

и далее (см. Крамер [8], раздел 15.10)

$$\mu_4 = \varkappa_4 + 3\varkappa_2^2. \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6), в частности, следует, что

$$\mu_4 \leqslant 15\, \varkappa_2^2. \tag{3.7}$$

Используя формулы (2.4) и (3.5), находим

$$\mathrm{M} Q_\chi(x_n) = \varkappa_1 = \operatorname{Sp} [A_n(\xi) + A_n(\zeta)]\, A_n(\chi) =$$

$$= 16 \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{\lambda_1}{2n} f_\xi(\lambda_1)\, d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2n}} \sin^2 \frac{\lambda^2}{2n} f_\chi(\lambda_2)\, d\lambda_2 + \operatorname{Sp} A_n(\zeta)\, A_n(\chi). \tag{3.8}$$

Предположим сперва, что $2 < \alpha_2 < 3$. Вместо $\operatorname{Sp} A_n(\zeta) A_n(\chi)$ мы будем вычислять $\operatorname{Sp} A_n(\zeta_1) A_n(\chi_1)$, где $\zeta_1(t)$ и $\chi_1(t)$ — процессы такие, что

$$f_{\zeta_1}(\lambda) = c_2 |\lambda|^{-\alpha_2}, \tag{3.9}$$

$$f_{\chi_1}(\lambda) = |\lambda|^{-\beta} \tag{3.10}$$

и, следовательно,

$$B_{\zeta_1}(t) = \frac{2\pi c_2}{\sin \frac{(\alpha_2 - 1)\pi}{2} \Gamma(\alpha_2)} t^{\alpha_2 - 1}, \tag{3.11}$$

$$B_{\chi_1}(t) = \frac{2\pi}{\sin \frac{(\beta - 1)\pi}{2} \Gamma(\beta)} t^{\beta - 1}. \tag{3.12}$$

Пользуясь формулами (2.5), (3.11) и (3.12), можем показать, что

$$\operatorname{Sp} A_n(\zeta_1)\, A_n(\chi_1) = \frac{4\pi c_2 \ln n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{3.13}$$

Отсюда нетрудно вывести, что при $2<\alpha_2<3$

$$\operatorname{Sp} A_n(\zeta) A_n(\chi)=\frac{4\pi c_2 \ln n}{n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{3.14}$$

Легко доказывается равенство (3.14) и в случаях $\alpha_2=2$, $\beta=3$ и $\alpha_2=3$, $\beta=2$. Действительно, пусть, например, $\alpha_2=2$, $f_{\zeta_1}(\lambda)=c_2\lambda^{-2}$. Тогда $A_n(\zeta_1)=$ $=\frac{2\pi c_2}{n}E_n$, где E_n — единичная матрица порядка n, и в соответствии с (2.4)

$$\operatorname{Sp} A_n(\zeta_1) A_n(\chi)=\frac{2\pi c_2}{n}\operatorname{Sp} A_n(\chi)=\frac{4\pi c_2 \ln n}{n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{3.15}$$

Отсюда легко следует (3.14).

Рассмотрим теперь случай, когда $3<\alpha_2\leqslant\frac{7}{2}$. Пусть $\lambda_0>0$. Введем в рассмотрение процесс $\zeta_2(t)$ со спектральной плотностью

$$f_{\zeta_2}(\lambda)=\begin{cases} 0, & \text{если } |\lambda|\leqslant\lambda_0 \\ c_2|\lambda|^{-\alpha_2}, & \text{если } |\lambda|>\lambda_0 \end{cases} \tag{3.16}$$

и вычислим $\operatorname{Sp} A_n(\zeta_2) A_n(\chi_1)$. В соответствии с (2.4), (3.10) и (3.16), будем иметь

$$\operatorname{Sp} A_n(\zeta_2) A_n(\chi_1)=16\int\limits_{|\lambda_1|>\lambda_0}\sin^2\frac{\lambda_1}{2n}\frac{c_2}{|\lambda_1|^{\alpha_2}}d\lambda_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2n}}\sin^2\frac{\lambda_2}{2n}\frac{d\lambda_2}{|\lambda_2|^{\beta}}=$$

$$=\frac{32\pi c_2}{n^3}\int\limits_{|\mu_1|>\frac{\lambda_0}{n}}\sin^2\frac{\mu_1}{2}\frac{d\mu_1}{|\mu_1|^{\alpha_2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n(\mu_1-\mu_2)}{2}}{2\pi n\sin^2\frac{\mu_1-\mu_2}{2}}\sin^2\frac{\mu_2}{2}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\mu_2+2k\pi|^{\beta}}\right]d\mu_2. \tag{3.17}$$

Отсюда, пользуясь ограниченностью сумм Фейера от ограниченных функций и теоремой Никольского, находим

$$\operatorname{Sp} A_n(\zeta_2) A_n(\chi_1)=\frac{16\pi c_2}{n^3}\int\limits_{\frac{\lambda_0}{n}}^{\pi}\frac{d\mu_1}{\mu_1^{\alpha_2-2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n(\mu_1-\mu_2)}{2}}{2\pi n\sin^2\frac{\mu_1-\mu_2}{2}}\sin^2\frac{\mu_2}{2}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\mu_2+2k\pi|^{\beta}}\right]d\mu_2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{16\pi c_2}{n^3}\int\limits_{\frac{\lambda_0}{n}}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{\mu}{2}}{\mu^{\alpha_2-2}}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\mu+2k\pi|^{\beta}}\right]d\mu+O\left(\frac{1}{n^{4-\beta}}\right)\int\limits_{\frac{\lambda_0}{n}}^{\pi}\frac{d\mu}{\mu^{\alpha_2-2}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{4\pi c_2}{n^2}\int\limits_{\frac{\lambda_0}{n}}^{\pi}\frac{d\mu}{\mu}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{4\pi c_2\ln n}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Таким образом,

$$\operatorname{Sp} A_n(\zeta_2) A_n(\chi_1)=\frac{4\pi c_2\ln n}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{3.18}$$

Пользуясь (2.4), (3.18) и теоремой Никольского, нетрудно показать, что

$$\left|\operatorname{Sp} A_n(\zeta) A_n(\chi)-\operatorname{Sp} A_n(\zeta_2) A_n(\chi_1)\right|=o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{3.19}$$

Из (3.18) и (3.19) следует, что в случае $3<\alpha_2\leqslant\frac{7}{2}$ справедливо (3.14). Сопоставляя (3.8) и (3.14), имеем

$$MQ_\chi(x_n)=16\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{\lambda_1}{2n}f_\xi(\lambda_1)\,d\lambda_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2n}}\sin^2\frac{\lambda_2}{2n}f_\chi(\lambda_2)\,d\lambda_2+$$

$$+\frac{4\pi c_2\ln n}{n^3}+o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right).\qquad(3.20)$$

Воспользуемся равенством (3.13) (случай $2<\alpha_2<3$) для оценки одного интеграла, который понадобится нам в дальнейшем. В соответствии с (2.4) имеет место равенство (ср. (3.17))

$$\operatorname{Sp}A_n(\zeta_1)A_n(\chi_1)=16c_2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{\lambda_1}{2n}\frac{d\lambda_1}{|\lambda_1|^{\alpha_2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2n}}\sin^2\frac{\lambda_2}{2n}\frac{d\lambda_2}{|\lambda_2|^{\beta}}=$$

$$=\frac{c_2}{n^3}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu_1}{|\mu_1|^{\alpha_2-2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n(\mu_1-\mu_2)}{2}}{\sin^2\frac{\mu_1-\mu_2}{2}}\cdot\frac{d\mu_2}{|\mu_2|^{\beta-2}}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).\qquad(3.21)$$

Сопоставляя (3.13) и (3.21), находим

$$\frac{1}{n^3}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu_1}{|\mu_1|^{\alpha_2-2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n(\mu_1-\mu_2)}{2}}{\sin^2\frac{\mu_1-\mu_2}{2}}\frac{d\mu_2}{|\mu_2|^{\beta-2}}=\frac{4\pi\ln n}{n^3}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\qquad(3.22)$$

$$(2<\alpha_2<3,\quad \alpha_2+\beta=5).$$

Переходим к оценке семиинварианта $\varkappa_2$, имеем

$$\varkappa_2=DQ_\chi(x_n)=2\operatorname{Sp}[A_n(\eta)A_n(\chi)]^2.\qquad(3.23)$$

Предположим вначале, что $2\leqslant\alpha_1\leqslant\frac{5}{2}$. Вычисление правой части (3.23) заменим вычислением $2\operatorname{Sp}[A_n(\eta_1)A_n(\chi_1)]^2$, где $\chi_1(t)$ — процесс, определённый выше (см. (3.10)), а $\eta_1(t)$ — процесс со спектральной плотностью

$$f_{\eta_1}(\lambda)=c_1|\lambda|^{-\alpha_1}.\qquad(3.24)$$

Ниже будет показано, что

$$2\operatorname{Sp}[A_n(\eta_1)A_n(\chi_1)]^2\leqslant\frac{32\pi^3c_1^2\ln n}{n^4}+O\left(\frac{1}{n^4}\right).\qquad(3.25)$$

Отсюда, пользуясь дважды тем фактом, что дисперсия суммы двух случайных величин не превосходит удвоенной суммы их дисперсий, нетрудно вывести, что при $2\leqslant\alpha_1\leqslant\frac{5}{2}$

$$\varkappa_2=2\operatorname{Sp}[A_n(\eta)A_n(\chi)]^2\leqslant\frac{128\pi^3c_1^2\ln n}{n^4}+o\left(\frac{\ln n}{n^4}\right)\qquad(3.26)$$

или, более грубо,

$$\varkappa_2\leqslant O\left(\frac{\ln n}{n^4}\right).\qquad(3.27)$$

В случаях $\alpha_1=2$, $\beta=\frac{5}{2}$ и $\alpha_1=\frac{5}{2}$, $\beta=2$ соотношение (3.25) легко вытекает из (3.13). Рассмотрим случай $2<\alpha_1<\frac{5}{2}$, $\beta=\frac{9}{2}-\alpha_1$. Воспользуемся вытекающей из (2.4), (3.10) и (3.24) формулой

$$2\,\mathrm{Sp}\,[A_n(\eta_1)A_n(\chi_1)]^2=2^9c_1^2\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{\lambda_1}{2n}\frac{d\lambda_1}{|\lambda_1|^{\alpha_1}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{\lambda_2}{2n}\frac{d\lambda_2}{|\lambda_2|^{\beta}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{\lambda_3}{2n}\frac{d\lambda_3}{|\lambda_3|^{\alpha_1}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\sin\frac{\lambda_2-\lambda_3}{2}\cdot\sin\frac{\lambda_3-\lambda_4}{2}\sin\frac{\lambda_4-\lambda_1}{2}}{\sin\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2n}\sin\frac{\lambda_2-\lambda_3}{2n}\sin\frac{\lambda_3-\lambda_4}{2n}\cdot\sin\frac{\lambda_4-\lambda_1}{2n}}\sin^2\frac{\lambda_4}{2n}\frac{d\lambda_4}{|\lambda_4|^{\beta}}. \qquad (3.28)$$

Отсюда, после некоторых несложных преобразований, находим

$$2\,\mathrm{Sp}\,[A_n(\eta_1)A_n(\chi_1)]^2=\frac{2^9c_1^2}{4\pi^2n^5}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[g_1(\mu_1)g_2(\mu_2)\frac{\sin\frac{n(\mu_1-\mu_2)}{2}}{\sin\frac{\mu_1-\mu_2}{2}}\right]d\mu_1\,d\mu_2\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4\pi^2}\left[g_1(\mu_3)g_2(\mu_4)\frac{\sin\frac{n(\mu_4-\mu_3)}{2}}{\sin\frac{\mu_4-\mu_3}{2}}\right]\frac{\sin\frac{n(\mu_3-\mu_2)}{2}\sin\frac{n(\mu_4-\mu_1)}{2}}{\sin\frac{\mu_3-\mu_2}{2}\sin\frac{\mu_4-\mu_1}{2}}\,d\mu_3\,d\mu_4, \qquad (3.29)$$

где

$$g_1(\mu)=2\pi\sin^2\frac{\mu}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\mu+2k\pi|^{\alpha_1}}, \qquad (3.30)$$

$$g_2(\mu)=2\pi\sin^2\frac{\mu}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\mu+2k\pi|^{\beta}}. \qquad (3.31)$$

Мы замечаем, что последний двойной интеграл в правой части (3.29) есть не что иное, как частная сумма двойного ряда Фурье от функции

$$g_1(\mu_2)g_2(\mu_1)\frac{\sin\frac{n(\mu_1-\mu_2)}{2}}{\sin\frac{\mu_1-\mu_2}{2}}$$

(см., напр., Фихтенгольц [12] n^0 697). Пользуясь этим фактом, неравенствами Коши-Бунековского и Бесселя, а также соотношением (3.22), находим

$$2\,\mathrm{Sp}\,[A_n(\eta_1)A_n(\chi_1)]^2\leqslant\frac{2^9c_1^2}{4\pi^2n^5}\int_{-\pi}^{\pi}[g_1(\mu_1)]^2d\mu_1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n(\mu_1-\mu_2)}{2}}{\sin^2\frac{\mu_1-\mu_2}{2}}[g_2(\mu_2)]^2d\mu_2=$$

$$=\frac{2c_1^2}{4\pi^2n^5}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{4\pi^2}{|\mu_1|^{2\alpha_1-4}}d\mu_1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n(\mu_1-\mu_2)}{2}}{\sin^2\frac{\mu_1-\mu_2}{2}}\frac{4\pi^2}{|\mu_2|^{2\beta-4}}d\mu_2+O\left(\frac{1}{n^4}\right)=$$

$$=\frac{32\pi^3c_1^2\ln n}{n^4}+O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Таким образом, формулы (3.25) и (3.27) при $2\leqslant\alpha_1\leqslant\frac{5}{2}$ доказаны.

Предположим теперь, что $\frac{3}{2}\leqslant\alpha_1<2$ или $\frac{5}{2}<\alpha_1\leqslant 3$. Так как $\alpha_1+\beta=\frac{9}{2}$, то, очевидно, достаточно рассмотреть случай $\frac{3}{2}\leqslant\alpha_1<2$. Пусть $\lambda_0>0$

таково, что $f_\eta(\lambda) < 2c_1 |\lambda|^{-\alpha_1}$ и $f_\chi(\lambda) < 2|\lambda|^{-\beta}$ при всех $|\lambda| > \lambda_0$. Введем в рассмотрение процесс $\chi_2(t)$ со спектральной плотностью

$$f_{\chi_2}(\lambda) = \begin{cases} 0 \quad, & \text{если} \quad |\lambda| \leqslant \lambda_0 \\ 2|\lambda|^{-\beta}, & \text{если} \quad |\lambda| > \lambda_0 . \end{cases} \tag{3.32}$$

Тогда, как нетрудно показать,

$$\varkappa_2 = \mathbf{D} Q_\chi(x_n) = 2\,\mathrm{Sp}\,[A_n(\eta) A_n(\chi)]^2 \leqslant 32\,\mathrm{Sp}\,[A_n(\eta_1) A_n(\chi_2)]^2 + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \tag{3.33}$$

Пользуясь, как и при доказательстве соотношения (3.25) $\left(\text{случай } 2 < \alpha_1 < \frac{5}{2}\right)$ формулой (2.4) и аппаратом рядов Фурье, находим, что при больших m

$$32\,\mathrm{Sp}\,[A_n(\eta_1) A_n(\chi_2)]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{n^4} \int\limits_{\frac{\lambda_0}{n}}^{\pi} \frac{d\mu_1}{\mu_1^{2\beta-4}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{n(\mu_1-\mu_2)}{2}}{\sin^2 \frac{\mu_1-\mu_2}{2}} |\mu_2|^{4-2\alpha_1} d\mu_2 + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \tag{3.34}$$

где L — некоторая постоянная.

Отсюда, пользуясь теоремой Никольского, находим

$$32\,\mathrm{Sp}\,[A_n(\eta_1) A_n(\chi_2)]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{n^4} \int\limits_{\frac{\lambda_0}{n}}^{\pi} \frac{d\mu}{\mu^{2(\beta+\alpha_1-4)}} + O\left(\frac{\ln n}{n^{4-2\alpha_1}}\right) \frac{L}{n^4} \int\limits_{\frac{\lambda_0}{n}}^{\pi} \frac{d\mu}{\mu^{2\beta-4}} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) = O\left(\frac{\ln n}{n^4}\right). \tag{3.35}$$

Сопоставляя (3.33) и (3.35), мы видим, что при $\frac{3}{2} \leqslant \alpha_1 < 2$ справедливо (3.27). Таким образом, соотношение (3.27) справедливо при всех α_1, удовлетворяющих условию теоремы. Из (3.7) и (3.27) вытекает теперь, что

$$\mu_4 \leqslant O\left(\frac{\ln^2 n}{n^8}\right). \tag{3.36}$$

Сопоставляя (3.20), (3.36) и (2.2) и применяя леммы Чебышева и Бореля-Кантелли, получаем утверждение теоремы.

К сожалению, нам не удалось пока доказать, что теорема 1 справедлива и при $\frac{3}{2} < \alpha_1 + \frac{1}{2} = \alpha_2 < 2$, хотя из теоремы 2 работы [6] вытекает, что и в этом случае гауссовские меры в функциональном пространстве реализаций, соответствующие процессам $\xi(t)$ и $\eta(t)$, ортогональны и, следовательно, выделение „сигнала“ $\zeta(t)$ на фоне „шума“ $\xi(t)$ принципиально возможно.

4. Теорема 2. *Пусть при больших* $|\lambda|$

$$f_\xi(\lambda) \leqslant \frac{c_1}{|\lambda|^{\alpha_1}} \tag{4.1}$$

и

$$f_\zeta(\lambda) = \frac{c_2}{|\lambda|^{\alpha_2}} + o\left(\frac{1}{|\lambda|^{\alpha_2}}\right), \tag{4.2}$$

где $\max\left[1,\ \alpha_2 - \frac{1}{2}\right] < \alpha_1 < \min\,[3,\ \alpha_2]$. *Тогда, если*

$$f_\chi(\lambda) = \frac{1}{|\lambda|^{\beta}} + o\left(\frac{1}{|\lambda|^{\beta}}\right), \tag{4.3}$$

где $1<\beta\leqslant 3$ *и* $\alpha_2+\beta<5$, *то с вероятностью* 1

$$\lim_{m\to\infty}\frac{n^{\alpha_2+\beta-3}}{K}\Bigg\{Q_\chi(x_n)-$$

$$-16\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{\lambda_1}{2n}f_\xi(\lambda_1)\,d\lambda_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2n}}\sin^2\frac{\lambda_2}{2n}f_\chi(\lambda_2)\,d\lambda_2\Bigg\}=c_2, \qquad (4.4)$$

где

$$K=32\pi\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4\frac{\mu}{2}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\mu+2k\pi|^{\alpha_2}}\Big]\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\mu+2k\pi|^{\beta}}\Big]d\mu, \qquad (4.5)$$

а n определяется соотношением (2.2).

Доказательство. Очевидно, как и в условиях теоремой 1, справедлива формула (3.8). При вычислении $\mathrm{Sp}\,A_n(\zeta)A_n(\chi)$ мы, не ограничивая общности, будем предполагать, что $\alpha_2\geqslant\beta$.

Предположим вначале, что $1<\beta\leqslant 2$. Тогда в соответствии с условием теоремы, $1<\beta\leqslant\alpha_2<\frac{7}{2}$. Пусть $\lambda_0>0$. Определим процессы $\zeta_2(t)$ и $\chi_1(t)$ так же, как и при доказательстве теоремы 1 (см. соотношения (3.10) и (3.16)). Аналогично тому, как при доказательстве теоремы 1 были получены формулы (3.17) и (3.18), находим

$$\mathrm{Sp}\,A_n(\zeta_2)A_n(\chi_1)=16\int_{|\lambda_1|>\lambda_0}\sin^2\frac{\lambda_1}{2n}\frac{c_2}{|\lambda_1|^{\alpha_2}}d\lambda_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2n}}\cdot\sin^2\frac{\lambda_2}{2n}\frac{d\lambda_2}{|\lambda_2|^{\beta}}=$$

$$=\frac{32\pi c_2}{n^{\alpha_2+\beta-3}}\int_{|\mu_1|>\frac{\lambda_0}{n}}\sin^2\frac{\mu_1}{2}\frac{d\mu_1}{|\mu_1|^{\alpha_2}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n(\mu_1-\mu_2)}{2}}{2\pi n\sin^2\frac{\mu_1-\mu_2}{2}}\sin^2\frac{\mu_2}{2}\times$$

$$\times\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\mu_2+2k\pi|^{\beta}}\Big]d\mu_2=\frac{32\pi c_2}{n^{\alpha_2+\beta-3}}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4\frac{\mu}{2}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\mu+2k\pi|^{\alpha_2}}\Big]\times$$

$$\times\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\mu+2k\pi|^{\beta}}\Big]d\mu+o\Big(\frac{1}{n^{\alpha_2+\beta-3}}\Big).$$

Отсюда легко вытекает, что в случае $1<\beta\leqslant 2$ также и

$$\mathrm{Sp}\,A_n(\zeta)A_n(\chi)=\frac{32\pi c_2}{n^{\alpha_2+\beta-3}}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4\frac{\mu}{2}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\mu+2k\pi|^{\alpha_2}}\Big]\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\mu+2k\pi|^{\beta}}\Big]d\mu+$$

$$+o\Big(\frac{1}{n^{\alpha_2+\beta-3}}\Big). \qquad (4.6)$$

Пусть теперь $2<\beta\leqslant\alpha_2<3$. Определим процесс $\zeta_1(t)$, как и при доказательстве теоремы 1, соотношением (3.9). Пусть $\gamma=\frac{1}{2}(5-\alpha_2-\beta)$. Пользуясь неравенством Гёльдера и сходимостью сумм Фейера от функций из L_p по норме пространства L_p при $p=(\beta-2+\gamma)^{-1}$ (см., например, Шилов [9], гл. VII, § 1), находим

$$\mathrm{Sp}\,A_n(\zeta_1)A_n(\chi_1)=16\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{\lambda_1}{2n}\frac{c_2}{|\lambda_1|^{\alpha_2}}d\lambda_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2n}}\sin^2\frac{\lambda_2}{2n}\frac{d\lambda_2}{|\lambda_2|^{\beta}}=$$

$$= \frac{32\pi c_3}{n^{\alpha_1+\beta-3}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2\frac{\mu_1}{2}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\mu_1+2k\pi|^{\alpha_1}}\Big] d\mu_1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{n(\mu_1-\mu_2)}{2}}{2\pi n \sin^2\frac{\mu_1-\mu_2}{2}} \sin^2\frac{\mu_2}{2} \times$$

$$\times \Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\mu_2+2k\pi|^{\beta}}\Big] d\mu_2 = \frac{32\pi c_3}{n^{\alpha_1+\beta-3}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^4\frac{\mu}{2}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\mu+2k\pi|^{\alpha_1}}\Big] \times$$

$$\times \Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\mu+2k\pi|^{\beta}}\Big] d\mu + o\left(\frac{1}{n^{\alpha_1+\beta-3}}\right).$$

Отсюда легко следует справедливость соотношения (4.6) и в случае $2<\beta\leqslant\alpha_2<3$. Сопоставляя (3.8), (4.5) и (4.6), имеем

$$\mathbf{M}Q_\chi(x_n) = 16 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin^2\frac{\lambda_1}{2n} f_\xi(\lambda_1)\, d\lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2n}} \sin^2\frac{\lambda_2}{2n} f_\chi(\lambda_2)\, d\lambda_2 +$$

$$+ \frac{c_3 K}{n^{\alpha_1+\beta-3}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha_1+\beta-3}}\right). \tag{4.7}$$

Переходя к оценке дисперсии $Q_\chi(x_n)$, мы, не ограничивая общности, будем считать, что $\alpha_1\leqslant\beta$ и $\alpha_1+\beta<\frac{9}{2}$. Пользуясь теми же приёмами, что и при доказательстве теоремы 1, находим, что при больших m

$$\mathbf{D}Q_\chi(x_n) = 2\,\mathrm{Sp}\,[A_n(\eta) A_n(\chi)]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{n^{2\alpha_1+2\beta-5}} \int\limits_{\frac{\lambda_0}{n}}^{\pi} \frac{d\mu_1}{\mu_1^{2\beta-4}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\frac{n(\mu_1-\mu_2)}{2}}{2\pi n\sin^2\frac{\mu_1-\mu_2}{2}} |\mu_2|^{4-2\alpha_1} d\mu_2 + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha_1+2\beta-5}}\right), \tag{4.8}$$

где L и λ_0 – некоторые положительные постоянные.

Пользуясь (4.8) и при $1<\alpha_1\leqslant 2$ теоремой Никольского, а при $2<\alpha_1\leqslant\leqslant\beta<\frac{5}{2}$ неравенством Гёльдера, как и при вычислении $\mathbf{M}Q_\chi(x_n)$ в случае $2<\beta\leqslant\alpha_2<3$, находим

$$\mathbf{D}Q_\chi(x_n) \leqslant O\left(\frac{1}{n^{2\alpha_1+2\beta-5}}\right). \tag{4.9}$$

Утверждение теоремы следует теперь из соотношений (2.2), (4.7) и (4.9) и леммы Чебышева и Бореля-Кантелли.

Заметим, что в условиях теорем 1 и 2 $\alpha_2+\beta\leqslant 5$. Если же выбрать показатель β так, что $\alpha_2+\beta>5$, то никакого полезного предельного соотношения мы не получим, ибо в этом случае, как можно показать, $\mathrm{Sp}\,A_n(\zeta)A_n(\chi)=O(n^{-3})$, а $\mathbf{D}Q_\chi(x_n)\geqslant cn^{-4}$, где $c=c\big(\eta(t),\ \chi(t)\big)>0$.

5. Теоремы 1 и 2 настоящей статьи допускают дальнейшие обобщения, также имеющие приложение к задаче о безошибочном выделении сигнала на фоне шума. В качестве примера мы сформулируем здесь две такие более общие теоремы, доказательство которых может быть проведено аналогично доказательству теорем 1 и 2.

Теорема 3. Пусть при больших $|\lambda|$

$$f_\xi(\lambda) \leqslant \frac{\varphi_1(\lambda)}{|\lambda|^{\alpha_1}} \tag{5.1}$$

и

$$f_\zeta(\lambda) = \frac{\varphi_2(\lambda)}{|\lambda|^{\alpha_2}} + o\left(\frac{1}{|\lambda|^{\alpha_2}}\right), \tag{5.2}$$

где $\max\left[1,\ \alpha_2-\frac{1}{2}\right]<\alpha_1<\min[3,\ \alpha_2]$, $\varphi_j(\lambda)$ — чётные неотрицательные функции такие, что

$$\int\limits_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}[\varphi_j(\lambda)]^2\,d\lambda<L\qquad(j=1,\ 2,\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)\tag{5.3}$$

и, кроме того, существуют такие числа $a>0$ и $b\geqslant 0$, что

$$\frac{1}{a}\int\limits_{ka+b}^{(k+1)a+b}\varphi_2(\lambda)\,d\lambda=I\geqslant 0\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)\tag{5.4}$$

Тогда, если

$$f_\chi(\lambda)=\frac{1}{|\lambda|^\beta},\tag{5.5}$$

где $1<\beta\leqslant 2$ и $\alpha_2+\beta<5$, то с вероятностью 1

$$\lim_{m\to\infty}\frac{n^{\alpha_2+\beta-3}}{K}\left\{Q_\chi(x_n)-\right.$$

$$\left.-16\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{\lambda_1}{2n}f_\xi(\lambda_1)\,d\lambda_1\int\limits_{-\infty}\frac{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2n}}\sin^2\frac{\lambda_2}{2n}f_\chi(\lambda_2)\,d\lambda_2\right\}=I,\tag{5.6}$$

где n и K определяются равенствами соответственно (2.2) и (4.5).

Теорема 4. Пусть при больших $|\lambda|$

$$f_\xi(\lambda)\leqslant\frac{\varphi_1(\lambda)}{|\lambda|^{\alpha_1}}\tag{5.7}$$

и

$$f_\chi(\lambda)=\frac{\varphi_2(\lambda)}{|\lambda|^{\alpha_2}}+o\left(\frac{1}{|\lambda|^{\alpha_2}}\right),\tag{5.8}$$

где $3\leqslant\alpha_1+\frac{1}{2}=\alpha_2\leqslant\frac{7}{2}$, а функции $\varphi_j(\lambda)$ $(j=1,\ 2)$ удовлетворяют тем же условиям, что и в формулировке теоремы 3. Тогда, если

$$f_\chi(\lambda)=\frac{1}{|\lambda|^\beta},\tag{5.9}$$

где $\alpha_2+\beta=5$, то с вероятностью 1

$$\lim_{m\to\infty}\frac{n^2}{4\pi\ln n}\left\{Q_\chi(x_n)-\right.$$

$$\left.-16\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{\lambda_1}{2n}f_\xi(\lambda_1)\,d\lambda_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2n}}\sin^2\frac{\lambda_2}{2n}f_\chi(\lambda_2)\,d\lambda_2\right\}=I,\tag{5.10}$$

где n и I определяются равенствами соответственно (2.2) и (5.4).

Автор выражает благодарность А. М. Яглому за постановку задачи и руководство работой.

Поступила в редакцию
15.I.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Baxter. A strong limit theorem for Gaussian processes. Proc. Amer. Math Soc., 7 (1956), 522–525.
2. F. Kozin. A limit theorem for processes with stationary independent increments. Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 960–963.
3. Е. Г. Гладышев. Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями. Теор. вероятностей и её примен. 6, № 1 (1961), 57—66.

4. В. Г. Алексеев, Об условиях взаимной сингулярности гауссовских мер, отвечающих двум случайным процессам. Теор. вероятностей и её примен. (в печати).
5. A. M. Yaglom, Equivalence and perpendicularity for two Gaussian measures in function space (в сборнике „Time series analysis" red. by M. Rosenblate) New York, 1963.
6. В. Г. Алексеев. Об условиях ортогональности и эквивалентности гауссовских мер в функциональном пространстве. Доклады АН СССР, 147, № 4 (1962).
7. С. М. Никольский. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами. Труды матем. ин-та им. Стеклова 15 (1945).
8. Г. Крамер. Математические методы статистики. ИЛ, М., 1948.
9. Г. Е. Шилов. Математический анализ. Спец. курс. Физматгиз, М., 1961.
10. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Физматгиз, М., 1961.
11. У. Гренандер и Г. Сёгё. Теплицевы формы и их приложения. ИЛ, М., 1961.
12. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III Физматгиз. М.—Л., 1960.

NAUJOS TEOREMOS APIE GAUSO ATSITIKTINIŲ PROCESŲ REALIZACIJĄ SU TIKIMYBE 1 TURIMAS SAVYBES

V. G. ALEKSEEV

(Reziumė)

Šis darbas skirtas atsitiktinių procesų ribinėms teoremoms, susijusioms su bendra atsitiktinio signalo išskyrimo triukšmų fone teorija.

NEW THEOREMS CONCERNING „ALMOST SURE" PROPERTIES OF REALIZATIONS OF GAUSSIAN RANDOM PROCESSES

V. G. ALEKSEEV

(Summary)

The convergence almost sure of stationary Gaussian processes is treated; the established results permit to detect random signals in the presense of noise.