I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2

1963

ДВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Л. ВИЛКАУСКАС

В работе рассматриваются большие уклонения типа Ю. В. Линника [1] для $\alpha < \frac{1}{6}$ в многомерном случае на некоторых областях.

Введем следующие обозначения:

$X, Y, U, \ldots$ — s-мерные векторы-строки, компоненты которых будем обозначать малыми буквами с индексами $X=(x_1, \ldots, x_s)$, $|X|$ — длина вектора, $O=(0, \ldots, 0)$, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — некоторые положительные константы, B — ограниченная функция рассматриваемых параметров, не всегда одна и та же, $\rho_i(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \int_Q e^{-\frac{1}{2}|X|^2} dX = \Phi(s, Q).$$

Рассмотрим последовательность независимых, одинаково распределенных случайных s-мерных векторов

$$\xi^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_s^{(k)}), \quad k=1, 2, \ldots \tag{1}$$

с $\mathbf{E}\xi^{(k)}=0$, $\mathbf{E}\xi_i^{(k)} \cdot \xi_j^{(k)} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — дельта Кронекера.

Пусть, далее,

$Y^{(n)}$ — случайный нормальный s-мерный вектор с

$$\mathbf{E}Y^{(n)}=0, \quad \mathbf{E}y_i^{(n)} \cdot y_j^{(n)} = n^{-2\alpha l} \cdot \delta_{ij},$$

где

$$i, j=1, \ldots, s, \quad l > \frac{s}{2};$$

$$S^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)};$$

$$\tilde{S}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \tilde{\xi}^{(k)},$$

где

$$\tilde{\xi}^{(k)} = \xi^{(k)} + \frac{Y^{(n)}}{\sqrt{n}};$$

$\{Q_n\}$, $n=1, \ldots$ — последовательность областей в s-мерном эвклидовом пространстве с расстоянием $R(n)$ от начала координат соответственно, причем

$$R(n) \in \left[0, \frac{n^\alpha}{\rho(n)}\right], \quad \alpha < \frac{1}{6}.$$

Будем говорить, что для последовательности (1) имеет место интегральное нормальное притяжение (и. н. п.) на последовательности $\{Q_n\}$, если

$$\frac{\mathbf{P}\{S^{(n)} \in Q_n\}}{\Phi(s, Q_n)} \to 1, \quad n \to \infty.$$

Теорема 1.

Если при $\alpha < \frac{1}{6}$

$$\mathbf{E} \exp\left(\sum_{i=1}^{s} |\xi_i^{(k)}|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}\right) < \infty, \tag{3}$$

то для последовательности (1) *имеет место и. н. п. на последовательности* $\{\bar{C}_n\}$, $n=1, \ldots$, *где*

$$\bar{C}_n = \left\{X : |X| \geqslant R(n)\right\}, \quad R(n) \in \left[0, \frac{n^\alpha}{\rho(n)}\right].$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что уже последовательность $\{\bar{\xi}^{(k)}\}$, $k=1, \ldots$ имеет ограниченную непрерывную плотность вероятности и для нее выполняется условие (3). Докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Если теорема 1 верна для последовательности* $\{\bar{\xi}^{(k)}\}$, $k=1, \ldots$, *то она верна и для последовательности* (1).

Доказательство. По формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}\left\{\bar{S}^{(n)} \in \bar{C}_n\right\} = \mathbf{P}\left\{|Y^{(n)}| > n^{(1-l)\alpha}\right\} \mathbf{P}\left\{\bar{S}^{(n)} \in \bar{C}_n \,\middle|\, |Y^{(n)}| > n^{(1-l)\alpha}\right\} +$$
$$+ \mathbf{P}\left\{|Y^{(n)}| \leqslant n^{(1-l)\alpha}\right\} \mathbf{P}\left\{\bar{S}^{(n)} \in \bar{C}_n \,\middle|\, |Y^{(n)}| \leqslant n^{(1-l)\alpha}\right\}.$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\left\{|Y^{(n)}| > n^{(1-l)\alpha}\right\} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \int\limits_{|Y| > n^\alpha} e^{-\frac{1}{2}|Y|^2} dY = o(1)\, \Phi(s, \bar{C}_n),$$

$$\mathbf{P}\left\{\bar{S}^{(n)} \in \bar{C}_n \,\middle|\, |Y^{(n)}| \leqslant n^{(1-l)\alpha}\right\} = \mathbf{P}\left\{\bar{S}^{(n)} \in \bar{C}_n\right\} + o(1)\, \Phi(s, \bar{C}_n). \tag{4}$$

Из очевидного неравенства

$$\mathbf{P}\left\{S^{(n)} \in \bar{C}_n\right\} \geqslant \mathbf{P}\left\{\bar{S}^{(n)} \in \bar{C}_n^*\right\} \Big| \left\{|Y^{(n)}| \leqslant n^{(1-l)\alpha}\right\}, \tag{5}$$

где

$$\bar{C}_n^* = \left\{X : |X|^2 > \left[R(n) + n^{(1-l)\alpha}\right]^2\right\},$$

(4) и из условия леммы 1 получаем

$$\mathbf{P}\left\{S^{(n)}\in\tilde C_n\right\}\geqslant\Phi(s,\ \tilde C_n^*)\left(1+o(1)\right).$$

Но

$$\Phi(s,\ \tilde C_n-\tilde C_n^*)=B\,\frac{R(n)}{n^{(l-1)\alpha}}\,\Phi(s,\ \tilde C_n).$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left\{S^{(n)}\in\tilde C_n\right\}\geqslant\Phi(s,\ \tilde C_n)\left(1+o(1)\right).\tag{6}$$

Заменяя в (5) выражение $R(n)+n^{(1-l)\alpha}$ выражением $R(n)-n^{(1-l)\alpha}$ и знак неравенства $\geqslant$ знаком $\leqslant$, получим, что

$$\mathbf{P}\left\{S^{(n)}\in\tilde C_n\right\}\leqslant\Phi(s,\ \tilde C_n)\left(1+o(1)\right).\tag{7}$$

Из (6) и (7) получаем

$$\mathbf{P}\left\{S^{(n)}\in\tilde C_n\right\}=\left(1+o(1)\right)\Phi(s,\ \tilde C_n).$$

Лемма 2. *Пусть* $\tilde C_n^{**}=\left\{X:|X|>n^{\frac{p}{2}}\right\}$, *где* $p>2(1+\alpha)$, *тогда*

$$\mathbf{P}\left\{\tilde S^{(n)}\in\tilde C_n^{**}\right\}=o(1)\,\Phi(s,\ \tilde C_n).\tag{8}$$

Доказательство.

Имеем

$$\mathbf{P}\left\{|\tilde S^{(n)}|>n^{\frac{p}{2}}\right\}\leqslant\mathbf{P}\left\{|S^{(n)}|>\frac{n^{\frac{p}{2}}}{4}\right\}+\mathbf{P}\left\{|Y^{(n)}|>\frac{n^{\frac{p}{2}}}{4}\right\}$$

и

$$\mathbf{P}\left\{|S^{(n)}|>\frac{n^{\frac{p}{2}}}{4}\right\}\leqslant\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{n}|\xi^{(k)}|>\frac{n^{\frac{p}{2}}}{4}\right\}.$$

Для оценки последнего требуется оценить

$$\mathbf{P}\left\{|\xi^{(k)}|>\frac{n^{\frac{p}{2}-1}}{4}\right\}=\int\limits_{|X|>\frac{1}{4}n^{\frac{p}{2}-1}}e^{-\sum\limits_{i=1}^{s}|x_i|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}}\cdot e^{\sum\limits_{i=1}^{s}|x_i|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}}\,dF(X),\tag{9}$$

где $F(x)$ — общая функция распределения последовательности (1). Из неравенства Гельдера имеем, что

$$\sum_{i=1}^{s}|x_i|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{s}x_i^2\right)^{\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{s}x_i^4\right)^{-\frac{1}{1+2\alpha}}.\tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), получим

$$\mathrm{P}\left\{|\xi^{(k)}|>\frac{n^{\frac{p}{2}-1}}{4}\right\}\leqslant\int\limits_{|X|>\frac{1}{4}n^{\frac{p}{2}-1}}\exp-\left[\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{s}x_i^2\right)^{2(1+\alpha)}}{\sum\limits_{i=1}^{s}x_i^4}\right]^{\frac{1}{1+2\alpha}}\times$$

$$\times\exp\left(\sum_{i=1}^{s}|x_i|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}\right)dF(X)\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{|X|>\frac{1}{4}n^{\frac{p}{2}-1}}\exp\left(-\sum_{i=1}^{s}x_i^2\right)^{\frac{2\alpha}{1+2\alpha}}\exp\left(\sum_{i=1}^{s}|x_i|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}\right)dF(X)\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left[-\frac{n^{p-1}}{4}\right]^{\frac{2\alpha}{1+2\alpha}}=o(1)\,\Phi(s,\tilde{C}_n).$$

Последнее и доказывает (8).

Из указанного о последовательности $\{\tilde{\xi}^{(k)}\}$, $k=1,\ldots$, [2] и [3] следует формула обращения

$$\mathrm{P}\left\{\tilde{S}^{(n)}\in K_n\right\}=\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}\int\limits_{R_s}\frac{n^{\frac{sp}{4}}I_{\frac{s}{2}}\left(n^{\frac{p+1}{2}}|U|\right)-R^{\frac{s}{2}}(n)\,I_{\frac{s}{2}}\left(R(n)\sqrt{n}\,|U|\right)}{|U|^{\frac{s}{2}}}\,\varphi^n(U)\,dU,$$

где R_s — s-мерное эвклидовое пространство,

$$K_n=\left\{X:R(n)\leqslant|X|\leqslant n^{\frac{p}{2}}\right\},$$

$\varphi(U)$ — характеристическая функция последовательности $\{\tilde{\xi}^{(k)}\}$, $k=1,\ldots$, $I_{\frac{s}{2}}\{\ldots\}$ — функция Бесселя.

Из (11) и (8) имеем

$$\mathrm{P}\left\{\tilde{S}^{(n)}\in\tilde{C}_n\right\}=\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}\int\limits_{R_s}\frac{n^{\frac{sp}{4}}I_{\frac{s}{2}}\left(n^{\frac{p+1}{2}}|U|\right)-R^{\frac{s}{2}}(n)\,I_{\frac{s}{2}}\left(R(n)\sqrt{n}\,|U|\right)}{|U|^{\frac{s}{2}}}\times$$

$$\times\varphi^{(n)}(U)\,dU+o(1)\,\Phi(s,\tilde{C}_n). \tag{12}$$

Заметим, что при $|U|>\varepsilon$

$$\frac{n^{\frac{sp}{4}}I_{\frac{s}{2}}\left(n^{\frac{p+1}{2}}|U|\right)-R^{\frac{s}{2}}(n)\,I_{\frac{s}{2}}\left(R(n)\sqrt{n}\,|U|\right)}{|U|^{\frac{s}{2}}}=Bn^{\frac{p(s-1)-1}{4}}, \tag{13}$$

и при $n^{-\frac{2\alpha-1}{2}} \leqslant |U| < \varepsilon$

$$\frac{n^{\frac{sp}{4}} I_{\frac{s}{2}}\left(n^{\frac{p+1}{2}} |U|\right) - R^{\frac{s}{2}}(n) I_{\frac{s}{2}}\left(R(n)\sqrt{n}\,|U|\right)}{|U|^{\frac{s}{2}}} = Bn^{\frac{p(s-1)-2\alpha+(1-2\alpha)s}{4}}. \tag{14}$$

В дальнейшем, учитывая (13), (14) и следуя [2], получим

$$\mathbf{P}\left\{\tilde{S}^{(n)} \in \tilde{C}_n\right\} = \frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \int\limits_{|U| < n^{-\frac{2\alpha-1}{2}}} \frac{n^{\frac{sp}{4}} I_{\frac{s}{2}}\left(n^{\frac{p+1}{2}} |U|\right) - R^{\frac{s}{2}}(n) I_{\frac{s}{2}}\left(R(n)\sqrt{n}\,|U|\right)}{|U|^{\frac{s}{2}}} \times$$

$$\times \varphi^{(n)}(U)\, dU + B\exp\left(-\alpha_0 n^{2\alpha}\right). \tag{15}$$

Обозначим

$$m = \left[\frac{n^{2\alpha}}{\rho_1(n)}\right],$$

$$\ln \varphi(U) = K(U).$$

Из [2] (см. (9) и (14)) получим

$$K(U) = -\frac{1}{2}\left(1 + n^{-2l\alpha}\right)|U|^2 + \sum_{r=3}^{m} \sum_{l_1+\ldots+l_s=r} \frac{\psi^r_{l_1\ldots l_s}}{l_1!\ldots l_s!} u_1^{l_1}\ldots u_s^{l_s} +$$

$$+ B\exp\left(-\alpha_1 \frac{n^{2\alpha}}{\rho_1(n)} \ln \rho_1(n)\right). \tag{16}$$

Обозначим

$$K_3(U) = \sum_{r=3}^{m} \sum_{l_1+\ldots+l_s=r} \frac{\psi^r_{l_1\ldots l_s}}{l_1!\ldots l_s!} u_1^{l_1}\ldots u_s^{l_s}.$$

При $|U| < n^{-\frac{2\alpha-1}{2}}$

$$\frac{n^{\frac{sp}{4}} I_{\frac{s}{2}}\left(n^{\frac{p+1}{2}} |U|\right) - R^{\frac{s}{2}}(n) I_{\frac{s}{2}}\left(R(n)\sqrt{n}\,|U|\right)}{|U|^{\frac{s}{2}}} = Bn^{\frac{p(2+s)+2}{4}}.$$

Подставляя (16) в (15), получим

$$\mathbf{P}\left\{\tilde{S}^{(n)} \in \tilde{C}_n\right\} = \frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \int\limits_{|U| < n^{-\frac{2\alpha-1}{2}}} \frac{n^{\frac{sp}{4}} I_{\frac{s}{2}}\left(n^{\frac{p+1}{2}} |U|\right) - R^{\frac{s}{2}}(n) I_{\frac{s}{2}}\left(R(n)\sqrt{n}\,|U|\right)}{|U|^{\frac{s}{2}}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{n}{2}\left(1 + n^{-2l\alpha}\right)|U|^2\right] \cdot \exp\left(nK_3(U)\right) dU + B\exp\left(-\alpha_2 \frac{n^{2\alpha}}{\rho_1(n)}\right). \tag{17}$$

Из [2] (см. (16) и (19)) имеем, что

$$\exp\left(nK_3(U)\right)=1+\sum_{r=3}^{m}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\frac{\chi^r_{l_1\ldots l_s}}{l_1!\ldots l_s!}u_1^{l_1}\ldots u_s^{l_s}+B\exp\left(-\alpha_3\frac{n^{2\alpha}}{\rho_1(n)}\right). \qquad (18)$$

Из (17) и (18), после замены переменных интегрирования

$$\sqrt{n(1+n^{-2l\alpha})}\,u_i=z_i,\quad i=1,\ \ldots,\ s,$$

получаем

$$\mathbf{P}\left\{\tilde{S}^{(n)}\in\tilde{C}_n\right\}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}\int\limits_{|Z|<n^{\alpha}\sqrt{1+n^{-2l\alpha}}}\frac{\left(\frac{n^{\frac{p}{2}}}{1+n^{-2l\alpha}}\right)^{\frac{s}{4}}I_{\frac{s}{2}}\left[\left(\frac{n^p}{1+n^{-2l\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}}|Z|\right]-\left(\frac{R(n)}{1+n^{-2l\alpha}}\right)^{\frac{s}{4}}I_{\frac{s}{2}}\left(\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2l\alpha}}}|Z|\right)}{|Z|^{\frac{s}{2}}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}|Z|^2\right)\left(1+\sum_{r=3}^{m}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\frac{\chi^r_{l_1\ldots l_s}}{l_1!\ldots l_s!}\left(\frac{z_1}{\sqrt{n(1+n^{-2l\alpha})}}\right)^{l_1}\ldots\left(\frac{z_s}{\sqrt{n(1+n^{-2l\alpha})}}\right)^{l_s}dZ+\right.$$

$$+B\exp\left(-\alpha_4\frac{n^{2\alpha}}{\rho_1(n)}\right). \qquad (19)$$

Интеграл в последней формуле распространяем на все пространство R_s.

$$\mathbf{P}\left\{\tilde{S}^{(n)}\in\tilde{C}_n\right\}=\frac{(1+n^{-2l\alpha})^{-\frac{s}{4}}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}\int\limits_{R_s}\frac{n^{\frac{ps}{4}}I_{\frac{s}{2}}\left(\sqrt{\frac{n^p}{1+n^{-2l\alpha}}}|Z|\right)-R^{\frac{s}{2}}(n)\,I_{\frac{s}{2}}\left(\sqrt{\frac{R^2(n)}{1+n^{-2l\alpha}}}|Z|\right)}{|Z|^{\frac{s}{2}}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}|Z|^2\right)\left(1+\sum_{r=3}^{m}\left[n(1+n^{-2l\alpha})\right]^{-\frac{r}{2}}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\frac{\chi^r_{l_1\ldots l_s}}{l_1!\ldots l_s!}z_1^{l_1}\ldots z_s^{l_s}\right)dZ+$$

$$+B\exp\left(-\alpha_5\frac{n^{2\alpha}}{\rho_1(n)}\right). \qquad (20)$$

Первый член (20) дает

$$\frac{(1+n^{-2l\alpha})^{-\frac{s}{4}}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}\int\limits_{R_s}\frac{n^{\frac{ps}{4}}I_{\frac{s}{2}}\left(\sqrt{\frac{n^p}{1+n^{-2l\alpha}}}|Z|\right)-R^{\frac{s}{2}}(n)\,I_{\frac{s}{2}}\left(\sqrt{\frac{R^2(n)}{1+n^{-2l\alpha}}}|Z|\right)}{|Z|^{\frac{s}{2}}}e^{-\frac{1}{2}|Z|^2}dZ=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}\int\limits_{\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2l\alpha}}}<|X|<\sqrt{\frac{n^p}{1+n^{-2l\alpha}}}}e^{-\frac{1}{2}|X|^2}dX=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}\int\limits_{|X|>R(n)}e^{-\frac{1}{2}|X|^2}dX+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}\int\limits_{\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2l\alpha}}}<|X|<R(n)}e^{-\frac{1}{2}|X|^2}dX-\frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}\int\limits_{|X|>\sqrt{\frac{n^p}{1+n^{-2l\alpha}}}}e^{-\frac{1}{2}|X|^2}dX. \qquad (21)$$

Очевидные оценки

$$\int\limits_{|X| > \sqrt{\frac{n^p}{1+n^{-2/\alpha}}}} e^{-\frac{1}{2}|X|^2}\, dX = o(1)\, \Phi(s, \tilde{C}_n)$$

и

$$\int\limits_{\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}<|X|<R(n)} e^{-\frac{1}{2}|X|^2}\, dX = B\,\frac{R^s(n)}{n^{2/\alpha}}\, e^{-\frac{1}{2}R^2(n)}\text{,}$$

дают для (21)

$$\Phi(s, \tilde{C}_n)\cdot\left(1+o(1)\right).$$

Остальные члены (20) дают

$$\frac{(1+n^{-2/\alpha})^{-\frac{s}{4}}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}\int\limits_{R_s}\frac{n^{\frac{ps}{4}}\, I_{\frac{s}{2}}\left(\sqrt{\frac{n^p}{1+n^{-2/\alpha}}}\,|Z|\right)-R^{\frac{s}{2}}(n)\, I_{\frac{s}{2}}\left(\sqrt{\frac{R^2(n)}{1+n^{-2/\alpha}}}\,|Z|\right)}{|Z|^{\frac{s}{2}}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}|Z|^2\right)\sum_{r=3}^{m}\left[n(1+n^{-2/\alpha})\right]^{-\frac{r}{2}}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\frac{\chi^r_{l_1\ldots l_s}}{l_1!\ldots l_s!}\, z_1^{l_1}\ldots z_s^{l_s}\, dZ=$$

$$=\sum_{r=3}^{m}\frac{B^r}{\left[n(1+n^{-2/\alpha})\right]^{\frac{r}{2}}}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\frac{\chi^r_{l_1\ldots l_s}}{l_1!\ldots l_s!}\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}\le|X|\le\frac{n^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}}\prod_{i=1}^{s}H_{l_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{x_i^2}{2}}\, dX. \qquad (22)$$

Оценим

$$\sum_{r=3}^{K}\frac{B^r}{\left[n(1+n^{-2/\alpha})\right]^{\frac{r}{2}}}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\frac{\chi^r_{l_1\ldots l_s}}{l_1!\ldots l_s!}\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}\le|X|\le\frac{n^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}}\prod_{i=1}^{s}H_{l_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{x_i^2}{2}}\, dX,$$

где K — некотсрая постоянная.

В этом случае для полиномов Эрмита возьмем

$$H_{l_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{2}}\right)=Bx_i^{l_i},\qquad i=1,\ \ldots,\ s.$$

Тогда

$$\int\limits_{\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}\leqslant|X|\leqslant\frac{n^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}}\prod_{i=1}^{s}H_{l_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{x_i^2}{2}}\,dX=$$

$$=B\int\limits_{\bar{C}_n}e^{-\frac{1}{2}|X|^2}x_1^{l_1}\ldots x_s^{l_s}\,dX+B\int\limits_{\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}\leqslant|X|\leqslant R(n)}e^{-\frac{1}{2}|X|^2}x_1^{l_1}\ldots x_s^{l_s}\,dX-$$

$$-B\int\limits_{|X|>\sqrt{\frac{n^p}{1+n^{-2/\alpha}}}}e^{-\frac{1}{2}|X|^2}\cdot x_1^{l_1}\ldots x_s^{l_s}\,dX. \tag{23}$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части (23). После замены переменных интегрирования

$$x_i=R(n)\,y_i,\qquad i=1,\ldots,s$$

получим

$$B\,R^{s+r}(n)\int\limits_{|Y|\geqslant 1}e^{-\frac{1}{2}R^2(n)|Y|^2}y_1^{l_1}\ldots y_s^{l_s}\,dY=B\int\limits_{1}^{\infty}e^{-\frac{R^2(n)}{2}u}\,u^{\frac{r+s}{2}-1}\,du=$$

$$=B\,\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}R^2(n)\right]}{R^2(n)}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-u}\left(1+\frac{2u}{R^2(n)}\right)^{\frac{r+s}{2}-1}du\leqslant$$

$$\leqslant B\,\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}R^2(n)\right]}{R^2(n)}+B\,\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}R^2(n)\right]}{R^{r+s}(n)}.$$

В дальнейшем мы будем считать, что $R(n)>1$, и для последнего выражения получим оценку

$$B\,\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}R^2(n)\right]}{R^2(n)}. \tag{24}$$

Легко проверить, что

$$\int\limits_{|X|>\frac{n^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}}e^{-\frac{1}{2}|X|^2}\cdot x_1^{l_1}\ldots x_s^{l_s}\,dX=o(1)\,\Phi(s,\bar{C}_n). \tag{25}$$

Для оценки второго интеграла в правой части (23) используем неравенство

$$x_1^{l_1}\ldots x_s^{l_s}<\frac{\left[\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\frac{l_i}{2}\right]^{\frac{r}{2}}\cdot|X|^r}{\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{r}{2}}},\quad \text{где}\quad r=\sum_{i=1}^{s}l_i.$$

Тогда

$$\int\limits_{\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}\leqslant|X|\leqslant R(n)} e^{-\frac{1}{2}|X|^2} x_1^{l_1}\ldots x_s^{l_s}\,dX = B\,\frac{R^{r+s}(n)}{n^{2/\alpha}}\,e^{-\frac{1}{2}R^2(n)}. \tag{26}$$

Из (23), (24), (25), (26) и оценки для

$$\chi^r_{l_1\ldots l_s} = Bn^{r\frac{1-2\alpha}{2}}\, l_1!\,\ldots\, l_s! \quad (\text{см. [2]}) \tag{27}$$

получаем

$$B\sum_{r=3}^{K}\frac{R^{r+s}(n)}{n^{(2l+r)\alpha}}\,e^{-\frac{1}{2}R^2(n)}\leqslant$$

$$\leqslant BR^{s-2}(n)\,e^{-\frac{1}{2}R^2(n)}\,\frac{1}{\rho^4(n)\,n^{2\alpha(l-1)}}\sum_{r=3}^{K}\rho^{3-r}(n) = o(1)\,\Phi(s,\bar{C}_n).$$

Для оставшейся суммы

$$\sum_{r=K}^{m}\frac{B^r}{\left[n\,(1+n^{-2/\alpha})\right]^{\frac{r}{2}}}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\frac{\chi^r_{l_1\ldots l_s}}{l_1!\ldots l_s!}\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}\leqslant|X|\leqslant\frac{n^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}}\prod_{i=1}^{s}H_{l_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{x_i^2}{2}}\,dX \tag{28}$$

требуются более точные оценки.

Имеем (см. [4])

$$H_{l_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{2}}\right) = l_i!\sum_{k_i=0}^{\left[\frac{l_i}{2}\right]}\frac{(-1)^{k_i}(\sqrt{2}\,x_i)^{l_i-2k_i}}{k_i!\,(l_i-2k_i)!}. \tag{29}$$

Рассмотрим

$$\int\limits_{\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}<|X|\leqslant\frac{n^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}}\prod_{i=1}^{s}H_{l_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{x_i^2}{2}}\,dX =$$

$$=\prod_{i=1}^{s}l_i!\sum_{k_1+\ldots+k_s=0}^{\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{l_i}{2}\right]}\frac{(-1)^{\sum_{i=1}^{s}k_i}\,2^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)}}{\prod_{i=1}^{s}k_i!\,\prod_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)!}\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}\leqslant|X|\leqslant\frac{n^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}} e^{-\frac{1}{2}|X|^2}\cdot x_1^{l_1-2k_1}\ldots x_s^{l_s-2k_s}\,dX. \tag{30}$$

Из [5] по формуле Каталана следует

$$\int\limits_{|X|>\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}} e^{-\frac{1}{2}|X|^2}\cdot x_1^{l_1-2k_1}\ldots x_s^{l_s-2k_s}\,dX=B\,\frac{R^{s-2}(n)}{(1+n^{-2/\alpha})^{\frac{s-2}{2}}}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{R^2(n)}{1+n^{-2/\alpha}}}\times$$

$$\times\left[\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}\right]^{\sum\limits_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)}\frac{\prod\limits_{i=1}^{s}\Gamma\left(\frac{l_i-2k_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left[\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)+\frac{s}{2}\right]}\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{\infty}e^{-y}\left(1+\frac{2(1+n^{-2/\alpha})}{R^2(n)}\,y\right)^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)+\frac{s}{2}-1}dy. \tag{31}$$

Используем неравенство

$$\left(1+\frac{2(1+n^{-2/\alpha})}{R^2(n)}\,y\right)^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)+\frac{s}{2}-1}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)+\frac{s}{2}-1}\left[1+\left(\frac{2(1+n^{-2/\alpha})}{R^2(n)}\,y\right)^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)+\frac{s}{2}-1}\right].$$

Тогда интеграл в правой части формулы (31) получит следующую оценку

$$B2^{\sum\limits_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)}\left(1+\Gamma\left[\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)+\frac{s}{2}\right]\left[\frac{2(1+n^{-2/\alpha})}{R^2(n)}\right]^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)+\frac{s}{2}-1}\right). \tag{32}$$

Из (30), (31) и (32) получаем

$$B\,\frac{R^{s-2}(n)}{(1+n^{-2/\alpha})^{\frac{s-2}{2}}}\,e^{-\frac{R^2(n)}{2(1+n^{-2/\alpha})}}\sum_{k_1+\ldots+k_s=0}^{\sum\limits_{i=1}^{s}\left[\frac{l_i}{2}\right]}\frac{(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{s}k_i}\,2^{\sum\limits_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)}}{\prod\limits_{i=1}^{s}k_i!\,\prod\limits_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)!}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{i=1}^{s}\Gamma\left(\frac{l_i-2k_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left[\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)+\frac{s}{2}\right)}\left[\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}\right]^{\sum\limits_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)}+$$

$$+Be^{-\frac{1}{2}\frac{R^2(n)}{1+n^{-2/\alpha}}}\sum_{k_1+\ldots+k_s=0}^{\sum\limits_{i=1}^{s}\left[\frac{l_i}{2}\right]}\frac{(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{s}k_i}\,2^{\frac{3}{2}\sum\limits_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)}\prod\limits_{i=1}^{s}\Gamma\left(\frac{l_i-2k_i+1}{2}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{s}k_i!\,\prod\limits_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)!}. \tag{33}$$

Займемся вторым членом (33).

Пусть

$$k_i=l_i\rho_i,$$

где

$$0\leqslant\rho_i\leqslant\frac{1}{2},\quad i=1,\ \ldots,\ s.$$

Тогда получим для него следующее выражение

$$Be^{-\frac{1}{2}\frac{R^2(n)}{1+n^{-2/\alpha}}}\sum_{\rho_1,\ldots,\rho_s} e^{-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{s}(l_j+1)\ln l_j+2\sum_{l=1}^{s} l_i} =$$

$$=Be^{-\frac{1}{2}\frac{R^2(n)}{1+n^{-2/\alpha}}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{s}(l_j+1)\ln l_j+2r+\left(s+\frac{1}{2}\right)\ln r} \tag{34}$$

Из (28) и (34) следует

$$Be^{-\frac{1}{2}\frac{R^2(n)}{1+n^{-2/\alpha}}}\sum_{r=K}^{m}\frac{B^r}{n^{\frac{r}{2}}(1+n^{-2/\alpha})^{\frac{r}{2}}}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\chi^r_{l_1\ldots l_s}e^{Br-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{s}(l_j+1)\ln l_j}=$$

$$=Be^{-\frac{1}{2}\frac{R^2(n)}{1+n^{-2/\alpha}}}\sum_{r=K}^{m}e^{r\left(\frac{1}{2}\ln r+B-\alpha\ln n\right)}. \tag{35}$$

При $r\leqslant\left[\frac{n^{s\alpha}}{\rho_1(n)}\right]$ (35) будет равняться

$$Be^{-\frac{1}{2}\frac{R^2(n)}{1+n^{-2/\alpha}}}\frac{1}{\rho_1^{\frac{K}{2}}(n)}=o(1)\cdot\Phi(s,\ \tilde{C}_n).$$

Перейдем к первому члену (33).

Имеем

$$\left[\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}\right]^{\sum_{l=1}^{s}(l_j-2k_j)}\frac{1}{\Gamma\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(l_i-2k_i)+\frac{s}{2}\right]}\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{r}{2}\ln r+r\ln\frac{n^{\alpha}}{\rho(n)}+\sum_{i=1}^{s}l_l\rho_l\left(\ln r-2\ln\frac{n^{s\alpha}}{\rho_1(n)}\right)+Br}$$

Кроме того, пусть

$$\sup_{\rho_1,\ldots,\rho_s}\sum_{i=1}^{s}l_l\rho_l\left(\ln r-2\ln\frac{n^{s\alpha}}{\rho_1(n)}\right)=\sum_{i=1}^{s}l_l\rho_l^*\left(\ln r-2\ln\frac{n^{s\alpha}}{\rho_1(n)}\right),$$

где

$$0\leqslant\rho_l^*\leqslant\frac{1}{2},\quad i=1,\ \ldots,\ s.$$

Но, так как первый член (33) отличается от второго только множителем

$$\left[\frac{R(n)}{\sqrt{1+n^{-2/\alpha}}}\right]^{\sum_{l=1}^{s}(l_j-2k_j)}\cdot\frac{1}{\Gamma\left[\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{s}(l_i-2k_l)+\frac{s}{2}\right]},$$

то оценка для него получится следующая

$$B\sum^{m}e^{-r\ln\rho(n)+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{s}l_l\rho_l^*\left(2\ln\rho(n)-\ln\rho_1(n)\right)}.$$

Возьмем

$$\ln \rho_1(n) > 2 \ln \rho(n).$$

Тогда для последней суммы будем иметь оценку

$$o(1)\, \Phi(s, \bar{C}_n).$$

Теорема доказана.

Назовем последовательность областей $\{Q_n\}$, $n=1, \ldots$, с растоянием $R(n)$ от начала координат соответственно, последовательностью типа N, если для нее выполняются следующие условия:

$$\frac{\Phi(s, \bar{C}_n \cap Q_n)}{\Phi(s, C_n \cap Q_n)} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2.1}$$

$$\frac{\Phi(s, L_n)}{\Phi(s, C_n \cap Q_n)} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2.2}$$

где

$$R(n) \in \left[\psi(n), \frac{n^\alpha}{\rho(n)}\right], \ \alpha < \frac{1}{6},$$

$$C_n = \left\{ X : |X| \leqslant \frac{n^\alpha}{\rho(n)} \right\},$$

$$\bar{C}_n = \left\{ X : |X| > \frac{n^\alpha}{\rho(n)} \right\},$$

L_n, $n=1, \ldots$ — область, взятая вдоль поверхности контура области Q_n шириной $\frac{1}{n^{(l-1)\alpha}}$ по обеим сторонам, $\psi(n)$ — сколь угодно медленно возрастающая функция.

Что множество последовательностей типа N не пусто, нетрудно убедиться (см. [6], [7]).

Покажем, что существуют последовательности, для которых условия (2.1) и (2.2) не выполняются.

Рассмотрим последовательность углов, лежащих на оси абсцисс, с расстоянием $\frac{n^\alpha}{\rho_1(n)}$ от начала координат и величиной угла Θ_n соответственно. Пусть

$$\Theta_n = e^{-\frac{1}{2}\frac{n^{2\alpha}}{\rho^2(n)}\left(1 - \frac{\rho^2(n)}{\rho_1^2(n)}\right)}, \quad \text{где } \rho(n) = o(1)\, \rho_1(n).$$

Из [6] имеем

$$\frac{\Phi(s, \bar{C}_n \cap Q_n)}{\Phi(s, C_n \cap Q_n)} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Условие (2.2) и подавно не выполнено.

Заметим, что для нарушения условия (2.1) потребовалось даже экспоненциальная скорость убывания угла.

Теорема 2. *Если выполнено условие* (3), *то для последовательности* (1) *имеет место и.н.п. на последовательности областей типа N.*

Доказательство. Доказательство начнем с обобщения леммы 1.

Лемма 3. *Если теорема 2 верна для последовательности* $\{\xi^{(k)}\}$, $k=1, \ldots$, *то она верна и для последовательности* (1).

Доказательство. Заметим, что в силу условия (2.1) и теоремы 1

$$\mathbf{P}\left\{ \tilde{S}^{(n)} \in Q_n \right\} = \mathbf{P}\left\{ \tilde{S}^{(n)} \in Q_n \cap C_n \right\} + o(1)\, \Phi(s, Q_n). \tag{2.3}$$

По формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}\left\{ \tilde{S}^{(n)} \in Q_n \cap C_n \right\} = \mathbf{P}\left\{ |Y| > n^{(1-l)\alpha} \right\} \mathbf{P}\left\{ \tilde{S}^{(n)} \in Q_n \cap C_n \,\Big|\, |Y| > n^{(1-l)\alpha} \right\} +$$

$$+ \mathbf{P}\left\{ |Y| \leqslant n^{(1-l)\alpha} \right\} \mathbf{P}\left\{ \tilde{S}^{(n)} \in Q_n \cap C_n \,\Big|\, |Y| \leqslant n^{(1-l)\alpha} \right\}.$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\left\{ |Y| > n^{(1-l)\alpha} \right\} = B \int\limits_{|X| > n^{\alpha}} e^{-\frac{1}{2}|X|^2}\, dX = o(1)\, \Phi(s, Q_n),$$

$$\mathbf{P}\left\{ \tilde{S}^{(n)} \in Q_n \cap C_n \,\Big|\, |Y| \leqslant \frac{1}{n^{(l-1)\alpha}} \right\} = \mathbf{P}\left\{ \tilde{S}^{(n)} \in Q_n \cap C_n \right\} + o(1)\, \Phi(s, Q_n). \tag{2.4}$$

Из очевидного неравенства

$$\mathbf{P}\left\{ S^{(n)} \in Q_n \cap C_n \right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{ \tilde{S}^{(n)} \in (Q_n \cap C_n) \cup L_n \,\Big|\, |Y| < n^{(1-l)\alpha} \right\} \tag{2.5}$$

(2.4), (2.3) и (2.2) получаем

$$\mathbf{P}\left\{ S^{(n)} \in Q_n \right\} \leqslant \left(1 + o(1)\right) \Phi(s, Q_n). \tag{2.6}$$

Взяв в (2.5) вместо $(Q_n \cap C_n) \cup L_n$ область $(Q_n \cap C_n) - L_n$ и заменив знак неравенства $\leqslant$ знаком $\geqslant$, получим

$$\mathbf{P}\left\{ S^{(n)} \in Q_n \right\} \geqslant \left(1 + o(1)\right) \Phi(s, Q_n). \tag{2.7}$$

(2.6) и (2.7) доказывает лемму.

Пусть $p_n(X)$ обозначает плотность вероятности случайной величины $\tilde{S}^{(n)}$. Имеем

$$\int\limits_{Q_n} p_n(X)\, dX = \int\limits_{C_n \cap Q_n} p_n(X)\, dX + \int\limits_{\bar{C}_n \cap Q_n} p_n(X)\, dX. \tag{2.8}$$

Теорема 1 и (2.1) дает

$$\int\limits_{Q_n \cap \bar{C}_n} p_n(X)\, dX \leqslant \int\limits_{\bar{C}_n} p_n(X)\, dX = \left(1 + o(1)\right) \Phi(s, \bar{C}_n) = o(1)\, \Phi(s, Q_n). \tag{2.9}$$

Из [2] следует, что

$$\int\limits_{C_n \cap Q_n} p_n(X)\, dX = \left(1 + o(1)\right) \Phi(s, Q_n \cap C_n). \tag{2.10}$$

В силу (2.8), (2.9) и (2.10)

$$\int\limits_{Q_n} p_n(X)\, dX = \left(1 + o(1)\right) \Phi(s,\ Q_n).$$

В заключение автор благодарит В. А. Статулявичуса за советы и указания.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
25.V.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник. Предельные теоремы для сумм независимых величин при учете больших уклонений. I, Теория вероят. и ее примен., VI, 2 (1961), 145—163.
2. Л. Л. Вилкаускас. Зоны нормальной сходимости в многомерном случае, Литовский математический сборник, I, 1—2 (1961), 25—40.
3. C. G. Esseen. Fourier analysis of Distribution Functions. Acta Mathematica, vol. 77 (1945), 1–125.
4. H. Bateman. Higher transcendentical functions, vol. II (1953), 153.
5. Г. М. Фихтенгольц. Курс диф. и интег. исчисл., III, 1960, 404.
6. H. Ruben. Probability content of regions under spherical normal distributions, III: The bivariate normal integral, Ann. Math. Stat., vol. 32 (1961), 171–186.
7. H. Ruben. Probability content of regions under spherical normal distributions, I, Ann Math. Stat., vol. 31 (1960), 598—618.

DVI INTEGRALINĖS TEOREMOS APIE DIDELIUS ATSILENKIMUS DAUGIAMAČIU ATVEJU

L. VILKAUSKAS

(Reziumė)

Nagrinėjama nepriklausomų atsitiktinių s-mačių vektorių seka

$$\xi^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_s^{(k)}) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Tegul

$$\mathrm{E}\,\xi^{(k)} = O, \quad \mathrm{E}\,\xi_i^{(k)} \cdot \xi_j^{(k)} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, s),$$

$$S^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)},$$

kur δ_{ij} – Kronekerio simbolis.

Sakome, kad yra integralinė normalinė trauka (i.n.t.) sekai (1) s-mačių aibių $\{Q_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ atžvilgiu, jeigu

$$\frac{\mathrm{P}\{S^{(n)} \in Q_n\}}{\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \displaystyle\int\limits_{Q_n} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s} x_i^2}\, dx_1 \ldots dx_s} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Darbe įrodytos dvi i.n.t. teoremos s-mačių aibių sekoms $\{Q_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, patenkinančioms (2.1) ir (2.2) sąlygas.

TWO INTEGRAL THEOREMS ON A LARGE DEVIATIONS IN THE MULTI-DIMENSIONAL CASE

L. VILKAUSKAS

(*Summary*)

We consider the sequence of independent s-dimensional identically distributed random vectors

$$\xi^{(k)}=(\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_s^{(k)}) \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Let

$$\mathrm{E}\,\xi^{(k)}=O, \quad \mathrm{E}\,\xi_i^{(k)}\cdot\xi_j^{(k)}=\delta_{ij} \quad (i, j=1, \ldots, s),$$

$$S^{(n)}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi^{(k)},$$

where δ_{ij} – symbol of Kronecker.

We say; that for sequence (1) take place an integral normal attraction (i.n.a.) on the sequence of s-dimensional sets $\{Q_n\}$ $(n=1, \ldots)$, if

$$\frac{\mathrm{P}\{S^{(n)}\in Q_n\}}{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}\int\limits_{Q_n} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s}x_i^2}\,dx_1\ldots dx_s} \to 1 \quad (n\to\infty).$$

In the paper are proved i.n.a. theorems on the sequence of s-dimensional sets $\{Q_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$, satifying the conditions (2.1) and (2.2).