III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1963

ЭНДОМОРФИЗМЫ НЕКОТОРЫХ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУПП

Е. ГАБОВИЧ

В статье рассматриваются сохраняющие порядок эндоморфизмы упорядоченных полугрупп. Описаны такие эндоморфизмы всех так называемых „фундаментальных" полугрупп.

1. Полугруппа A называется упорядоченной, если для некоторых пар a, b ее элементов установлено отношение порядка „$\geqslant$", удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) рефлективности: $a \geqslant a$ для любого $a \in A$;

2) антисимметричности: из $a \geqslant b$ и $b \geqslant a$ следует $a \geqslant c$ для любых a, b, $c \in A$;

3) транзитивности: из $a \geqslant b$ и $b \geqslant c$ следует $a = b$ для любых a, $b \in A$;

4) двусторонней стабильности: из $a \geqslant b$ следует $ac \geqslant bc$ и $ca \geqslant cb$ для любых a, b, $c \in A$.

Упорядоченная полугруппа A называется линейно упорядоченной, если для любых a, $b \in A$, или $a \geqslant b$, или $b \geqslant a$.

Упорядоченная полугруппа A называется тривиально упорядоченной, если из $a \geqslant b$ следует $a = b$ для любых a, $b \in A$.

Ясно, что любая полугруппа может быть тривиально упорядочена, если считать $a \geqslant b$ тогда и только тогда, когда $a = b$. Поэтому обыкновенные полугруппы можно рассматривать в качестве частного случая упорядоченных полугрупп, а общую теорию полугрупп — как частный случай теории упорядоченных полугрупп.

Если в упорядоченной полугруппе есть хотя бы одна пара a, b таких элементов, что $a \geqslant b$ и $a \neq b$, то будем говорить, что эта полугруппа упорядочена нетривиально.

2. В работе автора [1] было показано, что эндоморфизмы произвольной полугруппы образуют т. н. обобщенное полукольцо, которое определяется следующим образом.

Определение: а) множество R называется обобщенным полукольцом, если:

1) на нем определена бинарная операция умножения $a \cdot b \in R$, относительно которой R является полугруппой;

2) для некоторых пар a, b элементов из R определена операция сложения $a + b \in R$[1];

[1] Такие элементы называются суммируемыми.

3) если суммы $(a+b)+c$ и $a+(b+c)$ определены, то они совпадают;

4) если определена сумма $a+b$, то для любого $c \in R$ определены суммы $ac+bc$ и $ca+cb$, причем выполняются равенства

$$(a+b)c = ac+bc, \quad c(a+b) = ca+cb,$$

б) обобщенное полукольцо называется полукольцом, если относительно сложения оно является полугруппой.

3. Определение: а) обобщенное полукольцо R называется упорядоченным если его мультипликативная полугрупна упорядочена и, кроме того, выполняется условие двусторонней стабильности отношения порядка: для любых элементов c, $d \in R$, для которых определены суммы $a+c$ и $b+c$, и, соответственно, $d+a$ и $d+b$, из $a \leqslant b$ следует $a+c \leqslant b+c$ и $d+a \leqslant d+b$;

б) если упорядоченное обобщенное полукольцо R является полукольцом, то будем называть его упорядоченным полукольцом;

в) если мультипликативная полугруппа обобщенного полукольца упорядочена линейно, то и обобщенное полукольцо будем называть линейно упорядоченным.

4. Определение. Эндоморфизм φ упорядоченной полугруппы называется сохраняющим порядок эндоморфизмом или o-эндоморфизмом, если для любых a, $b \in A$ из $a \leqslant b$ следует $a\varphi \leqslant b\varphi$.

Во множестве o-эндоморфизмов полугруппы A следующим естественным образом вводится отношение порядка: $\varphi \leqslant \psi$, если для любого $a \in A$ выполняется $a\varphi \leqslant a\psi$. Легко проверяются рефлексивность, антисимметричность и транзитивность определенного отношения.

5. Лемма. o-эндоморфизмы упорядоченной полугруппы A образуют относительно умножения эндоморфизмов упорядоченную полугруппу.

Доказательство. Пусть φ, ψ — два o-эндоморфизма полугруппы A, a, $b \in A$, $a \leqslant b$. Тогда $a\varphi \leqslant b\varphi$, $(a\varphi)\psi \leqslant (b\varphi)\psi$ и

$$a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi \leqslant (b\varphi)\psi = b(\varphi\psi).$$

Поэтому произведение двух o-эндоморфизмов само является o-эндоморфизмом и множество всех o-эндоморфизмов упорядоченной полугруппы является полугруппой.

Эта полугруппа оказывается, относительно введенного в n° 4 отношения порядка, упорядоченной полугруппой. Чтобы убедиться в этом, проверим, выполнено ли условие двусторонней стабильности. Пусть $\varphi \leqslant \psi$ и χ — o-эндоморфизмы полугруппы A. Тогда для любого $a \in A$ имеем $a\varphi \leqslant a\psi$, откуда следует

$$a(\varphi\chi) = (a\varphi)\chi \leqslant (a\psi)\chi = a(\psi\chi)$$

и $\varphi\chi \leqslant \psi\chi$; с другой стороны из $\varphi \leqslant \psi$ следует

$$a(\chi\varphi) = (a\chi)\varphi \leqslant (a\chi)\psi = a(\chi\psi)$$

и $\chi\varphi \leqslant \chi\psi$, что и требовалось доказать.

6. Теорема. o-эндоморфизмы упорядоченной полугруппы A образуют упорядоченное обобщенное полукольцо.

Доказательство. Ввиду леммы n° 5, для доказательства теоремы необходимо показать, что сумма двух o-эндоморфизмов, если она определена, является o-эндоморфизмом и что выполняется условие двусторонней стабильности из n° 3.

Пусть φ и ψ — суммируемые o-эндоморфизмы полугруппы A, a, $b \in A$ и $a \leqslant b$. Тогда

$$a(\varphi+\psi) = a\varphi \cdot a\psi \leqslant b\varphi \cdot b\psi = b(\varphi+\psi),$$

т. е. $\varphi+\psi$ также является o-эндоморфизмом полугруппы A.

Пусть теперь φ, χ и ψ — такие o-эндоморфизмы, что $\varphi \leqslant \psi$ и φ и χ, а также ψ и χ попарно суммируемы. Покажем, что в этом случае $\varphi+\chi \leqslant \leqslant \psi+\chi$. Действительно, для любого $a \in A$ $a\varphi \leqslant a\psi$. Но ввиду того, что A — упорядоченная полугруппа, отсюда имеем

$$a(\varphi+\chi) = a\varphi \cdot a\chi \leqslant a\psi \cdot a\chi = a(\psi+\chi).$$

Аналогично доказывается вторая половина условия двусторонней стабильности.

Теорема доказана.

7. В дальнейшем нам понадобятся следующие сведения о моногенных полугруппах.

Как известно (см. [2]), полугруппа называется моногенной, если она состоит из степеней одного элемента x. Если все степени элемента x различны, то имеем дело с бесконечной моногенной полугруппой. Она изоморфна аддитивной полугруппе натуральных чисел. Если же среди степеней элемента x есть равные, то, как показано в [2], моногенная полугруппа полностью определяется заданием пары натуральных чисел (h, d), называемой типом этой моногенной полугруппы. Сама полугруппа оказывается в этом случае конечной; она состоит из элементов

$$x,\ x^2,\ \ldots,\ x^h,\ x^{h+1},\ \ldots,\ x^{h+d-1}, \tag{1}$$

причем степени элемента x, с показателем степени, бóльшим, чем $h+d-1$, приводятся к степеням (1) при помощи равенства

$$x^{h+kd+i} = x^{h+i}, \tag{2}$$

где $k=1, 2, \ldots, n$, $0 \leqslant i < d$.

Конечная моногенная полугруппа типа (h, d) изоморфна полугруппе, состоящей из натуральных чисел $1, 2, \ldots, h+d-1$ с операцией сложения $\oplus$, производимой по правилу[2]

$$i \oplus j = \begin{cases} i+j, & \text{если } i+j < h+d \\ l, & \text{если } i+j \geqslant h+d, \\ \text{причем} & l \equiv i+j \pmod d,\ h+d > l \geqslant h. \end{cases} \tag{3}$$

Этот изоморфизм и закон (3) легко выводятся из равенства (2).

8. Рассмотрим конечную моногенную полугруппу A типа (h, d), представленную натуральными числами $1, 2, \ldots, h+d-1$ с законом сложения (3). Ее можно нетривиально упорядочить следующим образом (будем обозначать вводимую упорядоченность при помощи символа „$*\geqslant$“ в отличие от „$\geqslant$“ — символа обычной упорядоченности натуральных чисел). Фиксируем некоторый элемент $x \in A$, $x < h$ и такое натуральное число z, что $x+zd < h+d$, и считаем, что

$$x \leqslant * x+zd; \tag{4}$$

[2] Знаком $+$ здесь обозначается обычное сложное натуральных чисел.

для элемента $y \in A$ такого, что $y = x + k < h + d$, считаем

$$y = x + k \leqslant * x + k + zd. \tag{5}$$

Легко видеть, что A при этом превращается в нетривиально упорядоченную полугруппу. При $x \geqslant h$ отношениями (4) и (5) определяется тривиальный порядок.

С другой стороны, если при каком-либо отношении порядка „$* \geqslant$“ в A для некоторого элемента $x \in A$ имеет место $x \leqslant * x + k$ и l — первое такое число, что $h \leqslant x + l$ ($l = 0, 1, 2, \ldots$), то $x + l \leqslant * x + l + k \leqslant * x + l + pk$ для любого натурального p. Поскольку для некоторого p найдется такое натуральное число q, что $pk = qd$, то отсюда следует

$$x + l \leqslant * x + l + k \leqslant * x + l + pk = x + l + qd \overset{(3)}{=} x + l,$$

что возможно лишь при $x + l = x + l + k$, откуда, ввиду (3), $k = zd$. Поскольку $x + k < h + d$, то для z имеем, опять-таки $x + zd < h + d$.

9. Ясно, что полугруппу A можно нетривиально упорядочить также и способом, двойственным описанному в n° 8:

$$x * \geqslant x + zd, \quad x + k * \geqslant x + k + zd, \tag{6}$$

при тех же предложениях относительно x, z и k, что и в n° 8. И, наоборот, если полугруппа A упорядочена каким-либо способом (6), то, опять-таки, $x * \geqslant x + k$ возможно лишь при $k = zd$.

Заметим, между прочим, что конечную моногенную полугруппу типа (h, d), ввиду сказанного, можно линейно упорядочить тогда и только тогда, когда $d = 1$, т. е. когда эта полугруппа является галоидной. При этом будут возможны два двойственных упорядочивания. Факт этот известен давно (см., например, [3]).

10. Оказывается, что в упорядоченной конечной моногенной полугруппе не могут одновременно существовать нетривиальные отношения порядка типа (4), (5) и (6).

Действительно, предположим, что в полугруппе A возможны одновременно и соотношения типа (4), (5) и соотношения типа (6). Тогда для некоторых элементов $x_1, x_2 \in A$, $x_1, x_2 < h$ будут иметь место соотношения

$$x_1 \leqslant * x_1 + z_1 d, \quad x_2 * \geqslant x_2 + z_2 d.$$

Предположим для определенности, что $x_2 \geqslant x_1$ и $x_2 = x_1 + k$. Тогда будем иметь

$$x_2 = x_1 + k \leqslant * x_1 + k + z_1 d = x_2 + z_1 d$$

и

$$x_2 + z_1 d * \geqslant x_2 * \geqslant x_2 + z_2 d.$$

Поскольку найдется такие натуральные числа p и q, что $x_2 + p z_1 d \geqslant h + d$ и $x_2 + q z_2 d \geqslant h + d$, причем, ввиду (3), $x_2 + p z_1 d = x_2 + q z_2 d$, то, ввиду

$$x_2 + q z_2 d = x_2 + p z_1 d * \geqslant x_2 + z_1 d * \geqslant x_2 * \geqslant x_2 + z_2 d * \geqslant x_2 + q z_2 d,$$

приходим к равенству $x_2 = x_2 + q z_2 d$, которое невозможно из-за $x_2 < h$.

Полученное противоречие доказывает, что в упорядоченной конечной моногенной полугруппе не могут одновременно выполняться отношения порядка типа (4), (5) и (6).

11. В уже упоминавшейся работе автора [1] показано, что эндоморфизмы конечной моногенной полугруппы A типа (h, d) образуют полукольцо, состоящее из $h+d-1$ элементов.

При этом каждый эндоморфизм φ однозначно определяется тем числом k, в которое он переводит элемент $1 \in A$, т. е. $k = 1\varphi$; относительно сложения эндоморфизмы образуют полугруппу, изоморфную полугруппе A, а эндоморфизм $\varphi \cdot \psi$, где $1\varphi = k$ и $1\psi = l$ определяется числом $k \odot l$, находимым по правилу

$$k \odot l = \begin{cases} kl, & \text{если} \quad kl < h+d, \\ m, & \text{если} \quad kl \geqslant h+d, \\ \text{причем} & m \equiv kl \pmod{d}, \ h \leqslant m < h+d. \end{cases}$$

12. Теорема. Каждый эндоморфизм конечной моногенной упорядоченной полугруппы A типа (h, d) является ее o-эндоморфизмом, поэтому полукольцо эндоморфизмов конечной моногенной полугруппы типа (h, d) является упорядоченным полукольцом o-эндоморфизмов. При этом для эндоморфизмов $\varphi : 1\varphi = k$ и $\psi : 1\psi = l$ отношение $\varphi \leqslant \psi$ имеет место тогда и только тогда, когда $k \leqslant * l$.

Доказательство. Пусть φ — эндоморфизм полугруппы A и для некоторых $x, y \in A$ имеет место $x \leqslant * y$. Ввиду n° 8 и n° 10, это имеет место тогда и только тогда, когда или $y = x + zd$, или $x = y + zd$. Пусть, например, выполняется первое из этих равенств: $x \leqslant * x + zd$, где $x + zd < h + d$. Тогда, учитывая коммутативность полугруппы A, имеем

$$x\varphi = kx \leqslant * kx \oplus zd \leqslant * kx \oplus kzd = k\,(x \oplus zd) = ky = y\varphi.$$

Аналогично показывается, что φ является o-эндоморфизмом и в случае $x = y + zd$.

Пусть теперь $\varphi : 1\varphi = k$ и $\psi : 1\psi = l$ — o-эндоморфизмы. Если имеет место $\varphi \leqslant \psi$, то из $1 \leqslant * 1$ следует $k = 1\varphi \leqslant * 1\psi = l$. Наоборот, если $k \leqslant * l$, то для любого $x \in A$

$$x\varphi = kx \leqslant * lx = x\psi$$

и $\varphi \leqslant \psi$.

Теорема доказана.

13. В обзорной статье Клиффорда [3] приведен ряд результатов, показывающих, что обширные классы коммутативных линейно упорядоченных полугрупп конструируются при помощи пяти так называемых „фундаментальных" полугрупп. Ими являются следующие полугруппы:

1° Линейно упорядоченная аддитивная полугруппа P положительных действительных чисел.

2° Линейно упорядоченная аддитивная полугруппа Z натуральных чисел.

3° Линейно упорядоченный относительно обычной упорядоченности действительных чисел полузамкнутый действительный интервал $(0, 1]$, на котором определена операция $a * b = \min(a + b, 1)$. Эту полугруппу обозначают символом P_1.

4° Полугруппа P_1', которая состоит из всех элементов полугруппы P_1 и символа ∞. Элементы из P_1 сохраняют обычную упорядоченность действительных чисел и, кроме того, для любого $a \in P_1$ имеет место $a < \infty$. Операция на P_1' определена следующим образом:

$$a * b = \begin{cases} a+b, & \text{если} \quad a+b \leqslant 1, \\ \infty, & \text{если} \quad a+b > 1. \end{cases}$$

5⁰ Упорядоченная при помощи соотношения $1 \leqslant *2$ конечная моногенная голоидная полугруппа типа $(h, 1)$, которую Клиффорд обозначает символом Z_n.

Все o-эндоморфизмы полугруппы Z_n нам известны; непосредственно проверяется, что любой эндоморфизм полугруппы Z (они описаны в [1]) является o-эндоморфизмом.

Найдем o-эндоморфизмы остальных фундаментальных полугрупп.

14. Теорема. Упорядоченное полукольцо o-эндоморфизмов линейно упорядоченной полугруппы P o-изоморфно линейно упорядоченному полукольцу положительных действительных чисел.

Доказательство. Непосредственно ясно, что умножение на любое положительное число есть o-эндоморфизм полугруппы P.

Пусть, наоборот, φ — o-эндоморфизм полугруппы P, a и b — два различных элемента из P. Покажем, что $\frac{a\varphi}{b\varphi} = \frac{a}{b}$. Допустим, что, например, $\frac{a\varphi}{b\varphi} > \frac{a}{b}$. Тогда найдется такое положительное рациональное число $\frac{m}{n}$, что

$$\frac{a\varphi}{b\varphi} > \frac{m}{n} > \frac{a}{b}, \quad m > 0, \quad n > 0.$$

Отсюда следует, что $n(a\varphi) > m(b\varphi)$ и $mb > na$. Но это является противоречием, ибо из $mb > na$ следует $n(a\varphi) = (na)\varphi \leqslant (mb)\varphi = m(b\varphi)$.

Итак, $\frac{a\varphi}{b\varphi} = \frac{a}{b}$, откуда $\frac{a\varphi}{a} = \frac{b\varphi}{b} = r$; $r > 0$, ибо $a\varphi > 0$ и $a > 0$. Это значит, что для любого $a \in P$ будет $a\varphi = a \cdot r$.

Аналогично тому, как это делается в пункте 2.11 работы [1], можно показать, что суммой o-эндоморфизмов φ и ψ, определяемых положительными действительными числами r и s, является o-эндоморфизм, определяемый числом $r+s$, а их произведением — o-эндоморфизм, определяемый числом rs. Ясно также, что бо́льшему числу соответствует бо́льшой o-эндоморфизм, и наоборот.

Теорема доказана.

15. Теорема. Упорядоченное полукольцо o-эндоморфизмов полугруппы P_1 o-изоморфно линейно упорядоченному полукольцу, состоящему из положительных действительных чисел $r \geqslant 1$ и символа ∞. При этом для действительных чисел операции сложения и умножения, а также упорядоченность определены обычным образом, а элемент ∞ больше любого действительного числа и имеют место равенства

$$\begin{aligned} r + \infty = \infty + r = \infty + \infty = \infty, \\ r \cdot \infty = \infty \cdot r = \infty \cdot \infty = \infty. \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Непосредственно ясно, что отображения $\varphi_r : a \to ar$, где $a \in P_1$ а r — такое положительное действительное число, что $r \geqslant 1$, и отображение $\nu : a \to 1$ для любого $a \in P_1$ будут являться o-эндоморфизмами полугруппы P_1. Покажем, что o-эндоморфизмами ν и φ_r исчерпывается множество o-эндоморфизмов полугруппы P_1. Именно, покажем, что любой o-эндоморфизм, отличный от ν является одним из o-эндоморфизмов φ_r.

Если $\varphi \neq \nu$ — o-эндоморфизм полугруппы P_1, $a \in P_1$ и $a\varphi = 1$, то для всех таких b из P_1, что $a < b$, ввиду $a\varphi = 1 \leqslant b\varphi$, имеем $b\varphi = 1$. Если же в P_1 найдется такой элемент c, что $c\varphi < 1$, то для любого $d < c$ также будет $d\varphi < 1$.

Пусть теперь φ — некоторый o-эндоморфизм, полугруппы P_1, отличный от ν, a, $b \in P_1$, $a < b$ и $b\varphi \neq 1$. Тогда и $a\varphi \neq 1$. Как и в п. 14 предположим, что, например, $\frac{a\varphi}{b\varphi} \gtrless \frac{a}{b}$. Тогда, опять-таки, найдется такое рациональное число $\frac{m}{n}$, что

$$1 \geqslant \frac{a\varphi}{b\varphi} > \frac{m}{n} > \frac{a}{b} > 0, \quad n > m > 0.$$

Отсюда следует, что $\frac{1}{m} \cdot a < \frac{1}{n} \cdot b < 1$ и $1 > \frac{1}{m} \cdot a\varphi > \frac{1}{n} \cdot b\varphi$. Но это является противоречием, ибо из первого неравенства следует, ввиду $a\varphi < 1$, следующее неравенство: $\frac{1}{m} \cdot a\varphi \leqslant \frac{1}{n} \cdot b\varphi$.

Поэтому $\frac{a}{b} = \frac{a\varphi}{b\varphi}$ и $\frac{a\varphi}{a} = \frac{b\varphi}{b} = r > 0$, т. е. для любого такого a, что $a\varphi < 1$, имеем $a\varphi = ar$. Это число r не может быть меньше единицы, ибо тогда для всех $a \in P_1$ было бы $a\varphi < 1$ и $a\varphi = ar$, но умножение на положительное действительное число r, меньше единицы, не порождает эндоморфизма полугруппы P_1, ибо образ P_1 при таком отображении не является подполугруппой в P_1.

Поэтому $r \geqslant 1$ и множество тех $a \in P_1$, для которых $a\varphi < 1$, ограничено сверху, хотя бы единицей. Следовательно, это множество обладает точной верхней границей c. Для всех $a < c$, по доказанному, $a\varphi = ar$; для всех $d \in P_1$, для которых $c < d$, имеем $d\varphi = 1$ и, ввиду $dr \geqslant 1$, можем считать, что $d\varphi = dr$. Само число c может относиться или к первому, или ко второму множеству; в обоих случаях $c\varphi = cr$. Итак доказано, что $\varphi = \varphi_r$.

o-изоморфизм между полукольцом o-эндоморфизмов полугруппы P_1 и указанным в формулировке теоремы полукольцом устанавливается следующим образом: если $\varphi = \varphi_r$, то o-эндоморфизму φ ставим в соответствие положительное действительное число r; o-эндоморфизму ν ставим в соответствие элемент ∞. o-изоморфность этого отображения легко проверяется.

Теорема доказана.

16. Упорядоченное полукольцо o-эндоморфизмов полугруппы P_1' o-изоморфно полукольцу o-эндоморфизмов полугруппы P_1.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Тартуский государственный
университет

Поступила в редакцию
7.IV.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Габович Е. Об эндоморфизмах полугрупп. Уч. зап. Тартуского гос. ун-та, 1962, 129, 3—19.
2. Ляпин А. С. Полугруппы. Москва, 1960.
3. Clifford A. H. Totally ordered commutative semigroups, Bull. Amer. Math. Soc., 1958, 64, 305—316.

KAI KURIŲ SUTVARKYTŲ PUSGRUPIŲ ENDOMORFIZMAI

E. GABOVIČIUS

(Reziumė)

Straipsnis susideda iš dviejų dalių. Pirmoje dalyje nagrinėjami sutvarkytų pusgrupių endomorfizmai, kurie vadinami o-endomorfizmais. Antroje aprašomi taip vadinamų „fundamentalinių" pusgrupių endomorfizmai.

ENDOMORPHISMS OF SOME ORDERED SEMI-GROUPS

by E. GABOVICH

(Summary)

The paper consists of two parts. In the first part we consider the endomorphisms of ordered olmi-groups (o-endomorphism). In the second we describe the endomorphisms of so called „fundamental" semi-groups.