III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1963

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ ЧЕТЫРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ ПРЯМЫХ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. ДРЕЙМАНАС

В статье [1] мною был рассмотрен общий случай четырехпараметрического многообразия прямых в четырехмерном проективном пространстве.

В этой заметке рассматривается многообразие прямых, являющихся касательными г-поверхности.

1. Инфинитезимальные движения проективного репера $\{A_i\}$ даются уравнениями [2]:

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \tag{1}$$

где $i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5$; $I, J, K = 1, 2, 3, 4$; $l, m, n = 3, 5$; $r, p, q = 4, 5$. Если ребро $(A_1 A_2)$ описывает многообразие прямых, то главные формы будут:

$$\omega_1^3,\ \omega_1^4,\ \omega_1^5,\ \omega_2^3,\ \omega_2^4,\ \omega_2^5. \tag{2}$$

Многообразие G определяется двумя линейными и соответствующими квадратичными уравнениями, которые получаются, если продифференцировать линейные уравнения внешним образом.

Линейные уравнения многообразия G можно записать

$$\omega_1^4 = n_1 \omega_2^5,\quad \omega_2^3 = n_2 \omega_1^5.$$

В общем случае n_1 и n_2 можно привести к -1. Произвол решения — две функции от четырех аргументов. Если один из коэффициентов n_1, n_2 равен нулю, а другой равен -1, то произвол решения — одна функция от четырех аргументов.

Если $n_1 = n_2 = 0$, получаем многообразие прямых, являющихся касательными г-поверхности.

В этой заметке и строится дифференциальная геометрия такого многообразия прямых. В дальнейшем её будем называть многообразием G_1.

Многообразие G_1 в репере первого порядка даётся внешними дифференциальными уравнениями:

$$\omega_1^4 = 0,\quad \omega_2^3 = 0, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}[\omega_3^4 \omega_1^3] - [\omega_1^2 \omega_2^4] + [\omega_5^4 \omega_1^5] = 0,\\ -[\omega_2^1 \omega_1^3] - [\omega_4^3 \omega_2^4] + [\omega_5^3 \omega_2^5] = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Система уравнений (3) и (4) в инволюции и произвол решения — две функции от трех аргументов.

При помощи группы реперов первого порядка каждой точке $A_1 + tA_2$ луча $(A_1 A_2)$ можно ассоциировать двумерную плоскость. Берём конус, который составляют прямые многообразия G_1, проходящие через точку A_1+tA_2. Плоскостью, ассоциированной точке A_1+tA_2, будем называть касательную плоскость к конусу вдоль луча (A_1A_2).

Уравнение ассоциированной двумерной плоскости такова:

$$\begin{cases} x^3=0, \\ x^4=0, \end{cases} \tag{5}$$

т. е. для любой точки A_1+tA_2 луча (A_1A_2) ассоциированная двумерная плоскость одна и та же — плоскость $(A_1A_2A_5)$. При переходе от одного луча к другому, ассоциированная двумерная плоскость меняется, ибо меняется точка A_5.

2. Развернув по лемме Картана уравнения (4), получаем:

$$\begin{aligned} \omega_3^4 &= \lambda_{33}\,\omega_1^3+\lambda_3^2\,\omega_2^4+\lambda_{35}\,\omega_1^5, \\ -\omega_1^2 &= \lambda_3^2\,\omega_1^3+\lambda_2\,\omega_2^4+\lambda_5^2\,\omega_1^5, \\ \omega_5^4 &= \lambda_{35}\,\omega_1^3+\lambda_5^2\,\omega_2^4+\lambda_{55}\,\omega_1^5, \\ -\omega_2^1 &= \mu_1\,\omega_1^3+\mu_4^1\,\omega_2^4+\mu_5^1\,\omega_2^5, \\ \omega_4^3 &= \mu_4^1\,\omega_1^3+\mu_{44}\,\omega_2^4+\mu_{45}\,\omega_2^5, \\ \omega_5^3 &= \mu_5^1\,\omega_1^3+\mu_{45}\,\omega_2^4+\mu_{55}\,\omega_2^5. \end{aligned} \tag{6}$$

Коэффициенты системы (6) удовлетворяют соответствующим квадратичным уравнениям, полученным дифференцированием системы (6) внешним образом.

Будем считать, что коэффициенты λ_{lm} и μ_{rp} симметричны по отношению индексов.

Вариации коэффициентов системы (6) даются:

$$\delta\lambda_2+\lambda_2(2\pi_2^2-\pi_1^1-\pi_4^4)=0, \tag{7}$$

$$\delta\mu_1+\mu_1(2\pi_1^1-\pi_2^2-\pi_3^3)=0, \tag{8}$$

$$\delta\mu_r^1+\mu_r^1\pi_1^1-\mu_p^1\pi_r^p-\pi_r^1=0, \tag{9}$$

$$\delta\lambda_l^2+\lambda_l^2\pi_2^2-\lambda_m^2\pi_l^m-\pi_l^2=0, \tag{10}$$

$$\delta\lambda_{lm}-\lambda_{nm}\pi_l^n-\lambda_{ln}\pi_m^n+\lambda_{lm}(\pi_1^1+\pi_4^4)=0, \tag{11}$$

$$\delta\mu_{rp}-\mu_{qp}\pi_r^q-\mu_{rq}\pi_p^q+\mu_{rp}(\pi_2^2+\pi_3^3)=0. \tag{12}$$

Таким образом видно, что системы величин (7), (8), (9), (10), (11) и (12) являются линейными геометрическими объектами, причем (7) и (8) — относительными инвариантами, а (11) и (12) — однородными [3].

Гиперплоскости $(A_1A_2A_3A_5)$ и $(A_1A_2A_4A_5)$, т. е. $x^4=0$ и $x^3=0$ являются инвариантными г-плоскостями, ибо

$$\delta x^4=(\Theta-\pi_4^4)\,x^4, \quad \delta x^3=(\Theta-\pi_3^3)\,x^3. \tag{13}$$

Двумерная плоскость $(A_1A_2A_5)$, ассоциированная точкам прямой (A_1A_2), является также инвариантной, как пересечение инвариантных г-плоскостей.

Если плоскость $(A_1A_2A_5)$ неподвижна, то и прямая (A_1A_2) неподвижна.

3. Если одна точка A_1+tA_2 прямой (A_1A_2) неподвижна, т. е. считаем, что

$$\begin{gathered} \omega_1^4=0, \quad \omega_2^3=0, \quad \omega_2^4=0, \quad \omega_1^3=0, \quad \omega_1^5=-t\,\omega_2^5, \\ dt+t(\omega_2^2-\omega_1^1+\lambda_5^2\,\omega_2^5)+t^2\mu_5^1\,\omega_2^5=0, \end{gathered} \tag{14}$$

то получаем

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + t(\lambda_5^2 A_2 - A_5)\,\omega_2^5, \tag{15}$$
$$dA_2 = \omega_2^2 A_2 + (A_5 - \mu_5^1 A_1)\,\omega_2^5.$$

Значит, что тогда точки A_1 и A_2 движутся в инвариантной двумерной плоскости $(A_1 A_2 A_5)$ по направлениям, которые определяют λ_5^2 и μ_5^1. Прямые, идущие из A_1 и A_2 по этим направлениям, пересекаются в одной точке.

Если $\lambda_5^2 = \mu_5^1 = 0$ (тогда и $\pi_5^2 = \pi_5^1 = 0$), то получаем:

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 - t\,\omega_2^5 A_5,$$
$$dA_2 = \omega_2^2 A_2 + \omega_2^5 A_5, \tag{16}$$

что показывает, что точка A_5 является точкой пересечения прямых, идущих из A_1 и A_2 по направлениям, определяемым λ_5^2 и μ_5^1.

4. Найдем асимптотические г-конусы на г-поверхностях (A_1) и (A_2). Дифференциал точки A_1 лежит в инвариантной г-плоскости $(A_1 A_2 A_3 A_5)$.

Асимптотический г-конус на г-поверхности (A_1) определяется уравнением

$$\lambda_{lm}\,\omega_1^l\,\omega_1^m = \lambda_2 (\omega_2^4)^2. \tag{17}$$

Дифференциал точки A_2 лежит в инвариантной г-плоскости $(A_1 A_2 A_4 A_5)$, и асимптотический г-конус на г-поверхности (A_2) определяется уравнением

$$\mu_{rp}\,\omega_2^r\,\omega_2^p = \mu_1 (\omega_1^3)^2. \tag{18}$$

5. Возьмем г-квадрику

$$a_{ij} x^i x^j = 0, \tag{19}$$

где

$$a_{ij} = (A_i{}^* A_j).$$

Потребовав, чтобы она имела бы касание нулевого порядка с г-поверхностью (A_1), получаем:

$$a_{11} = 0. \tag{20}$$

Касание первого порядка дает:

$$a_{13} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{15} = 0. \tag{21}$$

Касание второго порядка дает:

$$\begin{aligned} &a_{33} - (\lambda_3^2)^2 a_{22} + \lambda_2 \lambda_{33} a_{22} = 0,\\ &a_{35} + \lambda_2 \lambda_{35} a_{22} - \lambda_5^2 \lambda_3^2 a_{22} = 0,\\ &a_{55} + \lambda_2 \lambda_{55} a_{22} - (\lambda_5^2)^2 a_{22} = 0,\\ &a_{23} = \lambda_3^2 a_{22}, \quad a_{14} = \lambda_2 a_{22}, \quad a_{25} = \lambda_5^2 a_{22}. \end{aligned} \tag{22}$$

Поставив значения (20), (21), (22) в (19), получаем четырехпараметрическое семейство г-квадрик, имеющих с поверхностью (A_1) касание второго порядка:

$$\begin{aligned} &2\lambda_2 a_{22} x^1 x^4 + a_{22} x^2 x^2 + 2\lambda_3^2 a_{22} x^2 x^3 + 2a_{24} x^2 x^4 + 2\lambda_5^2 a_{22} x^2 x^5 +\\ &+ [(\lambda_3^2)^2 a_{22} - \lambda_2 \lambda_{33} a_{22}]\, x^3 x^3 + 2a_{34} x^3 x^4 + 2(\lambda_5^2 \lambda_3^2 - \lambda_2 \lambda_{35})\, a_{22} x^3 x^5 +\\ &+ a_{44} x^4 x^4 + 2a_{45} x^4 x^5 + [(\lambda_5^2)^2 - \lambda_2 \lambda_{55}]\, a_{22} x^5 x^5 = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Квадрика, лежащая в инвариантной г-плоскости $(A_1 A_2 A_3 A_5)$ дается уравнением

$$x^2 x^2 - \lambda_2 \lambda_{lm} x^l x^m + \lambda_l^2 x^l (2x^2 + \lambda_m^2 x^m) = 0. \tag{24}$$

λ_l^2 можно при помощи вторичных параметров привести к нулю, тогда уравнение (24) было бы

$$x^2 x^2 = \lambda_2 \lambda_{lm} x^l x^m. \tag{25}$$

Аналогично можно найти семейство соприкасающихся г-квадрик для г-поверхности (A_2).

Квадрика, лежащая в г-плоскости $(A_1 A_2 A_4 A_5)$ (в ней лежит dA_2) дается уравнением

$$x^1 x^1 - \mu_1 \mu_{rp} x^r x^p + \mu_r^1 x^r (2x^1 + \mu_p^1 x^p) = 0 \tag{26}$$

или, если μ_r^1 привести к нулю,

$$x^1 x^1 = \mu_1 \mu_{rp} x^r x^p. \tag{27}$$

Возьмем на г-квадрике произвольную точку A, близкую к точке A_1.

Точка A может быть задана при помощи векторного ряда Тейлора

$$A = A_1 + dA_1 + \frac{1}{2} d^2 A_1 + \ldots$$

Если координаты точки A относительно репера $\{A_i\}$ обозначить x^i и поставить в уравнение (25), то получится уравнение (17).

Значит квадрика (25) совпадает с асимптотическим г-конусом на г-поверхности (A_1) (17). Аналогично для уравнений (27) и (18).

6. Возьмем г-плоскость $(A_1 A_2 A_3 A_5)$. Будем считать, что эта г-плоскость неподвижна. Удобнее ввести проективный репер $\{B_I\}$ с вершинами:

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2, \quad B_3 = A_3, \quad B_4 = A_5. \tag{28}$$

Инфинитезимальные движения репера $\{B_I\}$ даются уравнениями:

$$dB_I = \Omega_I^K B_K. \tag{29}$$

Так как г-плоскость $(A_1 A_2 A_3 A_5)$ неподвижна, то прямая $(A_1 A_2)$ в ней описывает конгруэнцию, определяемую уравнениями:

$$\begin{cases} \Omega_1^4 = -\dfrac{\lambda_{33}}{\lambda_{35}} \Omega_1^3 \\ \Omega_2^3 = 0 \end{cases} \tag{30}$$

и соответствующими квадратичными, причем

$$\lambda_{ll} \lambda_{mn} - (\lambda_{lm})^2 = 0. \tag{31}$$

Из этого следует, что фокусы конгруэнции находятся в точках B_1 и B_2.

Касательная плоскость поверхности (B_2) является плоскость $(B_1 B_2 B_4)$, а для поверхности (B_1) — прямая

$$\left\{ B_1, \ \left(\lambda_5^2 \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{35}} - \lambda_3^2\right) B_2 + B_3 - \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{35}} B_4 \right\}.$$

Развертывающиеся поверхности конгруэнции даются уравнениями:

$$\Omega_1^3 = 0, \quad \Omega_2^4 = 0. \tag{32}$$

Следовательно прямые, полученные из прямой $(A_1 A_2)$ преобразованием Лапласа, даются [4]:

$$\left\{ B_1, \ \frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^3}\Big|_{\Omega_2^4=0} B_2 + B_3 \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ B_2, \ \frac{\Omega_2^1}{\Omega_2^4}\Big|_{\Omega_1^3=0} B_1 + B_4 \right\} \text{ или,} \tag{33}$$

обозначив

$$\frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^3}\Big|_{\Omega_2^4=0} = \tau_2 \quad \text{и} \quad \frac{\Omega_2^1}{\Omega_2^4}\Big|_{\Omega_1^3=0} = \tau_1, \tag{34}$$

имеем:

$$\{B_1,\ \tau_2 B_2 + B_3\} \quad \text{и} \quad \{B_2,\ \tau_1 B_1 + B_4\}. \tag{35}$$

Находим τ_1 и τ_2. Имеем

$$\tau_1 = \mu_5, \quad \tau_2 = -\lambda_3^2 + \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{35}} \lambda_5^2. \tag{36}$$

Таким образом, прямые, полученные из $(A_1 A_2)$ преобразованием Лапласа, являются:

$$\left\{ B_1, B_3 + \left(\lambda_5^2 \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{35}} - \lambda_3^2\right) B_2 \right\} \quad \text{и} \quad \{B_2,\ B_4 + \mu_5^1 B_1\}. \tag{37}$$

Если точка A_5 фиксирована ($\lambda_5^2 = \mu_5^1 = 0$), то прямые будут

$$\{B_1,\ B_3 - \lambda_3^2 B_2\} \quad \text{и} \quad \{B_2,\ B_4\}. \tag{38}$$

λ_3^2 тоже можно привести к нулю, тогда получим

$$\{B_1,\ B_3\} \quad \text{и} \quad \{B_2,\ B_4\} \tag{39}$$

или в четырехмерном пространстве (A_1, A_3) и (A_2, A_5). Значит $\lambda_3^2 = 0$ даёт, что (A_1, A_3) совпадает с одной из прямых, полученных преобразованием Лапласа из конгруэнции, лежащей в касательной г-плоскости г-поверхности (A_1).

Аналогичным образом рассматривается конгруэнция, лежащая в касательной г-плоскости г-поверхности (A_2).

$\mu_4^1 = 0$ даёт, что прямая (A_2, A_4) совпадает с одной из прямых, полученных преобразованием Лапласа.

Вильнюсский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию 6.V.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Дрейманас. О четырехпараметрическом многообразии прямых в четырехмерном проективном пространстве. Vilniaus Valstybinio V. Kapsuko vardo Universiteto mokslo darbai, XXV Matematika, Fizika, VIII, 1958.
2. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, гос. изд. т.-т. лит., М.—Л. (1948).
3. Г. Ф. Лаптев. Геометрия погруженных многообразий, Труды Московского матем. об-ва, 1953, т. 2, 275—382.
4. С. П. Фиников. Теория конгруэнции, гос. изд. т.-т. лит., М.—Л. (1950).

APIE VIENĄ SPECIALŲ KETURPARAMETRINĖS TIESIŲ DAUGDAROS KETURMATĖJE PROJEKTYVINĖJE ERDVĖJE ATVEJĮ

A. DREIMANAS

(Reziumė)

Darbe, keturmatėje projektyvinėje erdvėje, nagrinėjama keturparametrinė tiesių daugdara, sudaryta iš h-paviršiaus liečiamųjų. Nagrinėjama asimptotiniai h-kūgiai, liečiamosios h-kvadrikos, tiesės gaunamos pagalba Laplaso transformacijų. Darbas atliktas G. F. Laptevo metodu.

ÜBER EINEN SPETIALFALL DER VIERPARAMETRISCHEN MANNIGFALTIGKEIT DER GERADEN IM VIERDIMENSIONALEN PROJEKTIVISCHEN RAUM

A. DREIMANAS

(Zusammenfassung)

In diesem Artikel betrachtet man die vierparametrische Mannigfaltigkeit der Geraden im vierdiemensionalen projektivischen Raum, die aus Tangenten der Hyperflächen besteht. Diese Mannigfaltigkeit existiert mit Freiheit zweier Funktionen von drei Argumenten.

Man betrachtet hier die Haupttangentische Hyperkegel die Berührung der Hyperquadrik und die Geraden, die mit Hilfe der Laplaceschen Transformationen erhalten sind.