1963

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ АКСЕНТЬЕВА И ЧАКАЛОВА НА КЛАСС $K_n(D)$

Э. Г. КИРЬЯЦКИЙ

В работах Аксентьева [1] и Чакалова [2] приводятся достаточные признаки однолистности функций. В настоящей заметке некоторые результаты вышеупомянутых авторов обобщаются на классы $K_n(D)$, $n=1, 2, \ldots$. Напомним определение класса $K_n(D)$. Регулярная и однолистная в области D функция $f(z)$ принадлежит классу $K_n(D)$, если её n-ая разделённая разность $[z_0 z_1 \ldots z_n]$ не равна нулю при любых попарно различных $z_0, z_1, \ldots z_n$, взятых из области D. В частности, при $n=1$ имеем класс $K_1(D)$ однолистных в D функций.

В первой части заметки обобщаются результаты Аксентьева, во второй — Чакалова.

1. Пусть в конечной двусвязной области G, внешняя граница которой является выпуклой кривой L, определена функция

$$F(z)=Q(z)+f(z), \tag{1}$$

причём $Q(z)$ регулярна в G, $f(z)$ регулярна внутри области D, ограниченной выпуклой кривой L и $f^{(n)}(z)$ непрерывна в $\overline{D}$.

При этих предположениях имеют место следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если существует такое $N \geqslant 0$, при котором выполняются неравенства*

$$\operatorname{Re}\frac{f^{(z)}(z)}{n!} > N, \qquad z \in L, \tag{2}$$

$$|[z_0 z_1 \ldots z_n]_{Q(z)}| \leqslant N, \qquad z_0, z_1, \ldots, z_n \in G, \tag{3}$$

то $F(z) \in K_n(\overline{G})$.

Доказательство. Используя интегральное представление разделенной разности, получим

$$[z_0 z_1 \ldots z_n]_{F(z)} = \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\zeta)\, dt_1 \ldots dt_n + [z_0 z_1 \ldots z_n]_{Q(z)} =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} \operatorname{Re}\{f^{(n)}(\zeta) + n!\,[z_0 z_1 \ldots z_n]_{Q(z)}\}\, at_1 \ldots dt_n +$$

$$+ i \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} Im\{f^{(n)}(\zeta) + n!\,[z_0 z_1 \ldots z_n]_{Q(z)}\}\, dt_1 \ldots dt_n,$$

где $\zeta = z_1 + (z_2 - z_1)t + \ldots + (z_n - z_{n-1})t_{n-1} + (z_0 - z_n)t_n$. В силу выпуклости области D эта точка ζ лежит в $\overline{D}$.

Так как $\operatorname{Re} f^{(n)}(z)$ является гармонической функцией в D и непрерывной в $\overline{D}$, то на основании (2) и (3) имеем:

$$\operatorname{Re} f^{(n)}(z) > n!\,N, \qquad z \in \overline{D}, \tag{5}$$

и

$$\operatorname{Re}\{n!\,[z_0\ z_1\ \ldots\ z_n]_{Q(z)}\} \geqslant -n!\,N, \qquad z, z_1, \ldots, z_n \in \overline{G}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\operatorname{Re} f^{(n)}(z) + \operatorname{Re}\{n!\,[z_0 z_1\ \ldots\ z_n]_{Q(z)}\} > 0, \qquad z, z_0, z_1, \ldots, z_n \in G$$

и в силу (4) получаем, что $F(z) \in K_n(\overline{G})$.

Следствие 1. *Пусть*

$$F(z) = \frac{a_k}{z^k} + \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} + \ldots + \frac{a_1}{z} + f(z), \qquad k \geqslant 1,$$

где $f(z)$ регулярна в выпуклой области D, содержащей круг $|z| \leqslant r$. Если $f^{(n)}(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, и если на границе этой области

$$\operatorname{Re}\frac{f^{(n)}(z)}{n!} > \frac{c^n_{n+k-1}|a_k|}{r^{n+k}} + \frac{c^n_{n+k-2}|a_{k-1}|}{r^{n+k-1}} + \ldots + \frac{|a_1|}{r^{n+1}}, \tag{7}$$

то $F(z)$ принадлежит классу $K_n(D_r)$, где область D_r означает ту часть области D, для которой $|z| \geqslant r$.

Доказательство. Для функции

$$Q(z) = \frac{a_k}{z^k} + \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} + \ldots + \frac{a_1}{z}$$

справедливо следующее неравенство

$$|[z_0 z_1\ \ldots\ z_n]_{Q(z)}| \leqslant |a_k| \cdot |[z_0 z_1\ \ldots\ z_n]_{\frac{1}{z^k}}| + |a_{k-1}| \cdot |z_0 z_1\ \ldots\ z_n]_{\frac{1}{z^{k-1}}}| +$$

$$+ \ldots + |a_1| \cdot |[z_0 z_1\ \ldots\ z_n]_{\frac{1}{z}}| \leqslant \frac{c^n_{n+k-1}|a_k|}{r^{n+k}} + \frac{c^n_{n+k-2}|a_{k-1}|}{r^{n+k-1}} + \ldots + \frac{|a_1|}{r^{n+1}}.$$

Кроме того, выполнено условие (7). По теореме 1 $F(z) \in K_n(D)$.

Теорема 2. *Если существует такое N, при котором выполнены неравенства*

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} < N, \qquad z \in L, \tag{8}$$

$$|[z_0 z_1\ \ldots\ z_n]_{Q(z)}| \geqslant N, \qquad z_0, z_1, \ldots, z_n \in \overline{G}, \tag{9}$$

то $F(z) \in K_r(G)$.

Доказательство. Используя интегральное представление разделённой разности функции $f(z)$, имеем

$$[z_0 z_1\ \ldots\ z_n]_{F(z)} = [z_0 z_1\ \ldots\ z_n]_{Q(z)} + \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} |f^{(n)}(\zeta)|\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Учитывая (8) и (9) и принцип максимума модуля для функции $f(z)$, получим

$$|[z_0 z_1\ \ldots\ z_n]_{F(z)}| \geqslant |[z_0 z_1\ \ldots\ z_n]_{Q(z)}| - \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} |f^{(n)}(\zeta)|\, dt_1 \ldots dt_n > 0.$$

Отсюда следует, что $F(z) \in K_n(G)$.

Следствие 2. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в выпуклой области D, содержащей круг $|z|\leqslant\rho$ и лежащей в круге $|z|\leqslant r$ и $f^{(n)}(z)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Если на границе области D*

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}<\frac{|a_1|}{r^{n+1}}-\frac{c_{n+1}^n|a_2|}{\rho^{n+2}}-\ldots-\frac{c_{n+k-1}^n|a_k|}{\rho^{n+k}}, \tag{10}$$

то функция

$$F(z)=\frac{a_k}{z^k}+\frac{a_{k-1}}{z^{k-1}}+\ldots+\frac{a_1}{z}+f(z)$$

принадлежит классу $K_n(D_\rho)$, где область D_ρ означает ту часть области D, для которой $|z|\geqslant\rho$.

Доказательство. В кольце $\rho\leqslant|z|\leqslant r$ для функции

$$Q(z)=\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots+\frac{a_k}{z^k}$$

имеем

$$|[z_0z_1\ldots z_n]_{Q(z)}|=|a_1[z_0z_1\ldots z_n]_{\frac{1}{z}}+a_2[z_0z_1\ldots z_n]_{\frac{1}{z^2}}+$$

$$+\ldots+a_k[z_0z_1\ldots z_n]_{\frac{1}{z^k}}|\geqslant\frac{|a_1|}{r^{n+1}}-\frac{c_{n+1}^n|a_2|}{\rho^{n+2}}-\ldots-\frac{c_{n+k-1}^n|a_k|}{\rho^{n+k}}.$$

Так как выполнено условие (10), то по теореме 2 $F(z)\in K_n(D)$.

2. Пусть S — некоторое семейство функций. Если все функции этого семейства принадлежат классу $K_n(D)$, то область D назовем K_n-областью семейства S. Область D будем называть максимальной K_n-областью для семейства S, если она обладает следующим свойством.

При присоединении к области D произвольно малой окрестности любой граничной точки области D получается расширенная область D_1, уже не являющаяся K_n-областью, т. е. в семействе S имеется по крайней мере одна такая функция, которая либо не является голоморфной в области D_1, либо, будучи голоморфной, в области D_1 не принадлежит классу $K_n(D_1)$.

Теорема 3. *Обозначим через $C(\zeta, R)$ семейство рациональных функций вида*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{z-a_k},$$

где $A_k>0$, ζ, a_1, a_2, ..., a_m — некоторые комплексные постоянные, и $|a_k-\zeta|\leqslant R$, $k=1, 2, \ldots, m$.

Тогда единственной максимальной K_n-областью семейства $C(\zeta, R)$ является область G

$$|z-\zeta|>\frac{R}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}}. \tag{11}$$

Доказательство. Возьмём n-ую разделённую разность функции $f(z)$

$$[z_0z_1\ldots z_n]=(-1)^n\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{(z_0-a_k)(z_1-a_k)\ldots(z_n-a_k)}.$$

Так как точки $z_0, z_1, \ldots, z_n$ взяты внутри области G, то, вследствие (11), из любой такой точки круг $|z-\zeta|<R$ будет виден под углом, не превышающим $\frac{\pi}{n+1}$. Следовательно,

$$\left|\arg\frac{(z_0-a_k)(z_1-a_k)\ldots(z_n-a_k)}{(z_0-\zeta)(z_1-\zeta)\ldots(z_n-\zeta)}\right|\leqslant\frac{\pi}{2},\qquad z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n\in G,$$

и поэтому числа

$$\frac{A_k}{(z_0-a_k)(z_1-a_k)\ldots(z_n-a_k)},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

лежат все по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало координат. Сумма же таких чисел, как известно, отлична от нуля. Итак, имеем

$$[z_0 z_1\ \ldots\ z_n]_{f(z)}\neq 0,\qquad z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n\in G.$$

Докажем теперь, что область G является максимальной K_n-областью. Для этого достаточно показать, что какую бы точку ω

$$\omega=\zeta+\frac{R'}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}}e^{i\psi},\qquad R'\leqslant R,$$

мы не взяли, среди функций семейства $C(\zeta, R)$ имеется такая функция, которая не принадлежит классу K_n в круге $|z-\omega|\leqslant\rho$, где ρ — сколь угодно малое положительное число. Покажем, что такой функцией будет

$$f(z)=\frac{1}{z-\zeta-R'u_1e^{i\psi}}+\frac{2}{z-\zeta-R'u_2e^{i\psi}},$$

где

$$u_1=e^{\frac{i\pi n}{2(n+1)}},\qquad u_2=e^{\frac{-i\pi n}{2(n+1)}}.$$

Взяв n-ую производную функции $f(z)$, убеждаемся в справедливости следующего равенства

$$\frac{(-1)^n(e^{i\psi}R)^{n+1}f^{(n)}(w)}{n!}\left[\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}}-e^{\frac{i\pi n}{2(n+1)}}\right)\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}}-e^{\frac{-i\pi n}{2(n+1)}}\right)\right]^{n+1}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}}-e^{\frac{i\pi n}{2(n+1)}}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}}-e^{\frac{-i\pi n}{2(n+1)}}\right)^{n+1}=$$

$$=2\operatorname{Re}\left[\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}}-e^{\frac{i\pi n}{2(n+1)}}\right)^{n+1}\right]=0.$$

Отсюда следует, что $f^{(n)}(\omega)=0$ и функция $f(z)$ не принадлежит классу K_n в круге $|z-\omega|\leqslant\rho$.

Рассмотрим теперь семейство $c(Q)$ таких функций в области $|z|>1$, каждая из которых определяется формулой

$$Q(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\alpha(t)}{z-e^{it}},\tag{12}$$

где $\alpha(t)$ — ограниченная неубывающая вещественная функция на сегменте $[-\pi,\ \pi]$, обладающая по крайней мере одной точкой роста.

Теорема 4. *Единственной максимальной K_n-областью семейства $C(Q)$ есть область*

$$|z| > \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}}.$$

Доказательство. Что область

$$|z| > \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}}$$

является K_n-областью семейства $C(Q)$, устанавливается так же, как и в теореме 3. Чтобы доказать максимальность области

$$|z| > \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}}$$

и её единственность, достаточно установить, что для любой точки ω_0 из кольца

$$1 < |z| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}}$$

в семействе $C(Q)$ найдется такая функция, n-ая производная которой равна нулю в этой точке. Пусть $\omega_0 = \rho_0 e^{i\varphi}$, где

$$1 < \rho_0 \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}}, \qquad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Вычислим α так, чтобы $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi n}{2(n+1)}$ и

$$\rho_0 = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}} \sin\left(\frac{\pi}{2(n+1)} + \alpha\right).$$

Тогда функция

$$Q_0(z) = \frac{1}{z - e^{i(\varphi+\alpha)}} + \frac{1}{z - e^{i(\varphi+\alpha)}}$$

принадлежит семейству $C(Q)$. Взяв n-ую производную функции $Q_0(z)$, убеждаемся в справедливости следующих равенств:

$$\frac{e^{i(n+1)\varphi}(-1)Q_0^{(n)}(\omega_0)}{n!} = \frac{1}{(\rho_0 - e^{i\alpha})^{n+1}} + \frac{1}{(\rho_0 - e^{-i\alpha})^{n+1}} =$$

$$= \frac{(\rho_0 - e^{i\alpha})^{n+1} + (\rho_0 - e^{-i\alpha})^{n+1}}{(\rho_0 - e^{i\alpha})^{n+1}(\rho_0 - e^{-i\alpha})^{n+1}} = \frac{\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(n+1)} - i\right)^{n+1} + \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(n+1)} + i\right)^{n+1}}{\sin^{n+1}\alpha\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2(n+1)} + 1\right)^{n+1}} = 0.$$

Отсюда следует, что функция $Q_0(z)$ не принадлежит классу K_n в кольце

$$1 < z \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}}.$$

Замечание. Функция (12) при указанном там ограничении на функцию $\alpha(t)$ определяет так же некоторое семейство $c^*(Q)$ голоморфных в единичном круге $|z| < 1$ функций. В этом круге $|z| < 1$ не существует никакой K_n-области семейства $c^*(Q)$.

Действительно, пусть $\omega_0 = \rho_0 e^{i\varphi}$, где $0 \leqslant \rho_0 < 1$ и $-\pi \leqslant \varphi + \pi$. Определим α так, чтобы

$$-\frac{\pi n}{2(n+1)} \leqslant \alpha < 0.$$

Тогда функция (13) принадлежит семейству $C^*(Q)$ и нетрудно проверить, что её n-ая производная равна нулью в точке $z = \omega$.

Если в теоремах 3 и 4 положить $n = 1$, то получаются результаты Чакалова для однолистных функций.

Поступила в редакцию
2.IV.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксентьев. К достаточным признакам однолистности регулярных функций. Изв. Высш. Уч. завед. № 3, 1958.
2. Чакалов. Максимальные области однолистности некоторых классов аналитических функций. Укр. мат. журн. № 4, 1959.

KAI KURIOS AKSENTJEVO IR ČAKALOVO TEOREMOS $K_n(D)$ KLASĖJE

E. KIRJACKIS

(Reziumė)

Aksentjevas [1] ir Čakalovas [2] nagrinėjo kai kurias funkcijų klases ir nustatė pakankamas sąlygas, kad tų klasių funkcijos būtų vienalapės.

Šitame darbe nustatomos pakankamos sąlygos, kad minėtos funkcijos priklausytų $K_n(D)$ klasei, t. y., kad bet kuriems taškams $z_0, z_1, \ldots, z_n \in D$ tų funkcijų padalytas skirtumas $[z_0 z_1 \ldots z_n]$ nebūtų lygus nuliui.

AUSDEHNUNG EINIGER SÄTZE VON AKSENTJEFF UND TSHAKALOFF AUF DIE KLASSEN $K_n(D)$

E. KIRJATSKY

(Zusammenfassung)

Aksentjeff und Tshakaloff betrachten in ihren Arbeiten ([1], [2]) gewisse Funktionenklassen und führen hinreichende Bedingungen dafür an, dass die Funktionen dieser Klassen schlicht seien.

In diesem Beitrag werden hinreichende Bedingungen dafür gegeben, dass die obigen Funktionen der Klasse $K_n(D)$ angehören, d. h. dass für beliebigen Punkte $z_0, z_1, \ldots, z_n \in D$ die dividierte Differenz $[z_0 z_1 \ldots z_n]$ solcher Funktionen nicht gleich Null sei.