АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ

П. СУРВИЛА

1. Рассматривается последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

с $M\xi_k=0$, $D\xi_k=\sigma_k^2>0$ и $M|\xi_k|^s=\beta_{sk}<\infty$ $(s\geqslant 3)$, функциями распределения $F_k(x)$ и характеристическими функциями $f_k(t)$, $k=1, 2, \ldots$.

Обозначеня:

$$B_n^2=\sum_{k=1}^n \sigma_k, \quad B_{\nu n}=\sum_{k=1}^n \beta_{\nu k}, \; L_{\nu n}=\frac{B_{\nu n}}{B_n^\nu}, \quad \nu=3, \ldots, s,$$

$\bar F_n(x)$, $p_n(x)$ и $\bar f_n(t)$ — функция распределения, плотность и характеристическая функция нормированной суммы $\bar S_n=B_n^{-1}\sum_{k=1}^n \xi_k$ соответственно.

В работе автора [3] доказаны асимптотические разложения для производных характеристической функции $\bar f_n(t)$ с остаточным членом вида $O(L_{sn})$. Там же даны асимптотические разложения для $p_n(x)$ с оценкой остаточного члена относительно x в том случае, когда случайные величины последовательности (1) распределены одинаково.

В настоящей работе при некотором дополнительном условии мы находим еще один последующий член асимптотических разложений для производных характеристической функции $\bar f_n(t)$ и остаточный член при этом принимает вид $o(L_{sn})$ (теорема 1). Получены также асимптотические разложения для $\bar p_\nu(x)$ в случае неодинаково распределенных слагаемых (теоремы 2 и 3). Условия, накладываемые при этом на случайные величины последовательности (1), весьма просты.

Вводим следующие условия.

Условие А. Случайные величины ξ_k последовательности (1) имеют плотности распределения $p_k(x)\leqslant C_k$, причем $C_k^2\sigma_k^2\leqslant M$, $M<\infty$ для $k=1, 2, \ldots$.

Условие В. $\frac{1}{B_{sn}}\sum_{k=1}^n \int\limits_{|x|>B_n^{1-\tau}} |x|^s dF_k|x| \to 0$, когда $n\to\infty$, для некоторого $\tau>0$.

2. **Теорема 1.** *Если последовательность удовлетворяет условиям:*

1) $L_{sn}\to 0$, *когда* $n\to\infty$,

2) *выполняется условие* В,

то для достаточно больших n при $|t|\leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)+\gamma}}$ *для любого* $\gamma\geqslant 1$ *имеют место следующие соотношения:*

$$|\bar{f}_n^{(l)}(t)-h_{sn}^{(l)}(t)|\leqslant \delta_l(B_n,\ B_{sn})L_{sn}e^{-\frac{t^2}{3}}\left\{|t|^{s-l}+|t|^{3(s-2)+l+1}\right\}$$

для $l=0,\ 1,\ \ldots,\ s,$ *и* $\delta_e(B_n,\ B_{sn})\to 0,$ *когда* $n\to\infty$.

Здесь

$$\bar{f}_n^{(l)}(t)=\frac{d^l}{dt^l}\bar{f}_n(t),\quad h_{sn}^{(l)}(t)=\frac{d^l}{dt^l}h_{sn}(t),$$

и

$$h_{mn}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\sum_{k=3}^{m}Q_{kn}(it)L_{kn}\right],\qquad m=s-1,\ s,$$

где $Q_{kn}(it)$, $k=3,\ \ldots,\ s$ *многочлены степени* $3(k-2)$ *с равномерно относительно n ограниченными коэффициентами.*

Теорема 2. *Пусть последовательность* (1) *удовлетворяет условиям:*

1) $(\ln^s B_n)L_{sn}\to 0$, *когда* $n\to\infty$,

2) *выполняется условие* A.

Тогда для достаточно больших n, равномерно относительно x имеет место соотношение

$$|\bar{p}_n(x)-\varphi_{s-1\ n}(x)|=O(L_{sn}).\tag{2}$$

Если, кроме того, выполняется и условие B, *то при* $n\to\infty$, *равномерно относительно x имеет место соотношение*

$$|\bar{p}_n(x)-\varphi_{s,n}(x)|=o(L_{sn}).\tag{3}$$

Теорема 3. *Пусть последовательность* (1) *удовлетворяет условиям:*

1) $(\ln^s B_n)L_{sn}\to 0$, *когда* $n\to\infty$,

2) *выполняется условие* A,

3) *существует конечное положительное число* R *такое, что для достаточно больших n верно неравенство* $M_{1n}=\sum_{k=1}^{n}M|\xi_k|\leqslant B_n^R$.

Тогда для достаточно больших n и для всех $x\in(-\infty,\ \infty)$ *имеет место соотношение*

$$|p_n(x)-\varphi_{s-1,n}(x)|=\frac{O(L_{sn})}{1+(x)^s}.\tag{4}$$

Если, кроме того, выполняется и условие B, *то при* $n\to\infty$ *и для всех* $x\in(-\infty,\ \infty)$ *верно соотношение*

$$|p_n(x)-\varphi_{s,n}(x)|=\frac{o(L_{sn})}{1+|x|^s}.\tag{5}$$

Константа символа O может быть выбрана независящая от x, и стремление к нулю под символом o тоже независит от x.

В теоремах 2 и 3 обозначено

$$\varphi_{m,n}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}h_{m,n}(t),\qquad m=s-1,\ s.$$

Заметим, что теорема 2 работы [3] является частным случаем теоремы 3.

3. Отметим некоторые следствия.

Теорема 4. *Если выполнены условия* 1, 2, 3 *теоремы* 3, *то при* $n\to\infty$ *верно соотношение*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |p_n(x)-\varphi_{s-1,n}(x)|^p\,dx=O(L_{sn}^p)$$

для любого $p>\frac{1}{s}$.

Если, кроме того, выполняется и условие B, *то*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |p_n(x)-\varphi_{s,n}(x)|^p\,dx=o(L_{sn}),\qquad (n\to\infty)$$

для любого $p>\frac{1}{s}$.

Теорема 5. *Если выполнены условия* 1, 2, 3 *теоремы* 3, *то при* $n\to\infty$ *и для всех* $x\in(-\infty,\infty)$ *верно соотношение*

$$|\bar F_n(x)+\Phi_{s-1,n}(x)|=\frac{O(L_{sn})}{1+|x|^{s-1}}.$$

Если, кроме того, выполняется и условие B, *то при* $n\to\infty$ *для всех* $x\in(-\infty,\infty)$ *верно соотношение*

$$|\bar F_n(x)-\Phi_{s,n}(x)|=\frac{o(L_{sn})}{1+|x|^{s-1}}.$$

Здесь

$$\Phi_{m,n}(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_{m,n}(u)\,du,\qquad m=s-1,\ s,$$

а символы O *и* o *не зависят от* x.

4. Доказательство теоремы 1 полностью проводить не будем, так как оно аналогично доказательству теоремы 1 работы [3]. Разница лишь в том, что здесь надо воспользоваться следующими разложениями для производных логарифмов характеристических функций слагаемых:

$$\left.\begin{aligned}
&\ln^{(l)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)=\sum_{\nu=l}^{s}\frac{\chi_{\nu k}i^\nu t^{\nu-l}}{(\nu-l)!\,B_n^\nu}+r_k^{(l)}\left(\frac{t}{B_n}\right),\quad l=0,\ 1,\ \dots,s, k=1,\ 2,\ \dots,\ n,\\
&\qquad\chi_{0k}=\chi_{1k}=0,\quad \text{и при}\quad |t|\leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)+\gamma}},\quad (\gamma\geqslant 1)\\
&\text{верно неравенство}\\
&\sum_{k=1}^{n}\left|r_k^{(l)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\delta(B_n,\ B_{sn})L_{sn}\frac{|t|^{s-l}}{(s-l)!}\{|t|+1\},\quad l=0,\ 1,\ \dots,\ s,
\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

где $\delta(B_n,\ B_{sn})\to 0$, когда $n\to\infty$. (Под $\ln f(t)$ подразумевается главное значение логарифма.)

Соотношения (6) доказываются следующими рассуждениями.

Пусть

$$\alpha_{\nu k}=M\xi_k^\nu,\qquad \chi_{\nu k}=\frac{1}{i^\nu}\ln^{(\nu)}f_k(t)\Big|_{t=0},\qquad \nu=2,\ 3,\ \dots,\ s.$$

Воспользуемся неравенствами

$$L_{\nu n}\leqslant L_{sn}^{\frac{\nu-2}{s-2}},\qquad \nu=3,\ \dots,\ s, \tag{7}$$

которые доказаны в [2], и будем считать, что $|t|\leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)+\gamma}}$.

Так как $\beta_{sk} < \infty$, то $f_k(t)$ имеет ограниченные и непрерывные производные до s-ого порядка включительно, и в исследуемом интервале имеют место следующие разложения:

$$\left.\begin{aligned} &f_k^{(l)}\left(\frac{t}{B_n}\right)=\sum_{\nu=1}^{s}\frac{\alpha_{\nu k} i^\nu t^{\nu-l}}{(\nu-l)!\,B_n^\nu}+r_{lk}\left(\frac{t}{B_n}\right) \quad \text{для} \quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ s\\ &\text{и}\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\quad (\alpha_{0k}=1,\ \alpha_{1k}=0),\quad \text{где}\\ &r_{lk}\left(\frac{t}{B_n}\right)=\frac{i^s t^{s-l}}{(s-l)!\,B_n^s}\left\{\int\limits_{|x|\leqslant B_n^{1-\tau}} x^s\left[e^{\frac{i\Theta_k t}{B_n}x}-1\right]dF_k(x)+\right.\\ &\left.+\int\limits_{|x|>B_n^{1-\tau}} x^s\left[e^{\frac{i\Theta_k t}{B_n}x}-1\right]dF_k(x)\right\},\quad |\Theta_k|\leqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Используя неравенства $|e^{iz}-1|\leqslant|z|$ и $|e^{iz}-1|\leqslant 2$, легко получаем, что

$$\left|r_{lk}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\frac{|t|^{s-l}}{(s-l)!\,B_n^s}\left\{\frac{|t|\,\beta_{sk}}{B_n^\tau}+2\int\limits_{|x|>B_n^{1-\tau}}|x|^s dF_k(x)\right\}, \tag{9}$$

для $l=0,\ 1,\ \ldots,\ s$ и $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Из соотношений (8), используя неравенства (7), получим, что в нашем интервале верны неравенства

$$\left|f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\geqslant\frac{1}{2},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{10}$$

Следовательно, $\ln f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)$ является функцией непрерывной в этом интервале. Так как логарифмическая производная порядка l функции $f_k(t)$ рационально выражается через $f_k^{\nu}(t)$, $0\leqslant\nu\leqslant l$, причем в знаменатель входит только $f_k(t)$ в степени не высшей l, то, согласно неравенствам (10) и тому, что $f_k^{\nu}(t)$, $\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ s$ являются функциями ограниченными и непрерывными, в нашем интервале, $\ln^{(l)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)$ является функцией непрерывной и ограниченной с непрерывными и ограниченными производными до порядка $s-l$ включительно. Используя известную теорему о разложении функции в ряд Тейлора, получим, что

$$\ln^{(l)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)=\sum_{\nu=l}^{s}\frac{\chi_{\nu k} i^\nu t^{\nu-l}}{(\nu-l)!\,B_n^\nu}+r_k^{(l)}\left(\frac{t}{B_n}\right),\quad \text{для}\quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ s\quad \text{и}$$

$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, $(\chi_{0k}=\chi_{01}=0)$, где

$$r_k^{(l)}\left(\frac{t}{B_n}\right)=\frac{t^{s-l}}{(s-l)!}\left[\frac{d^s}{dt^s}\ln f_k\left(\frac{\Theta_k t}{B_n}\right)-\frac{i^s\chi_{sk}}{B_n^s}\right],\quad (|\Theta_k|\leqslant 1,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{11}$$

Дифференцируя тождество

$$f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)=\exp\left\{\ln f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right\},$$

получаем

$$f_k^{(1)}\left(\frac{t}{B_n}\right)=f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\ln^{(1)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right).$$

Дифференцируя это соотношение $s-1$ раз, получим

$$f_k^{(s)}\left(\frac{t}{B_n}\right)=\sum_{m=0}^{s-1} C_{s-1}^m \ln^{(m+1)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) f_k^{(s-m-1)}\left(\frac{t}{B_n}\right),$$

откуда следует, что

$$\ln^{(s)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)=\frac{1}{f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}\left\{f_k^{(s)}\left(\frac{t}{B_n}\right)-\sum_{m=0}^{s-2} C_{s-1}^m \ln^{(m+1)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) f_k^{(s-m-1)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right\}, \quad (12)$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Очевидно

$$\ln^{(l)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\Big|_{t=0}=\frac{i^l\chi_{lk}}{B_n^l}, \qquad l=1,\ 2,\ \ldots,\ s, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Из соотношения (12), согласно этим равенствам, следует, что

$$\ln^{(s)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\Big|_{t=0}=\frac{i^s\alpha_{sk}}{B_n^s}-\frac{i^s}{B_n^s}\sum_{m=0}^{s-2} C_{s-1}^m \chi_{m+1,k}\,\alpha_{s-m-1,k}=\frac{i^s\chi_{sk}}{B_n^s},\ k=1,2,\ldots,n. \quad (13)$$

Далее воспользуемся разложениями

$$f_k^{(r)}\left(\frac{t}{B_n}\right)=\frac{i^r\alpha_{rk}}{B_n^r}+\rho_{rk}\left(\frac{t}{B_n}\right), \quad \text{где} \quad \left|\rho_{rk}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\frac{\beta_{r+1,k}}{B_n^{r+1}}\,|t|,$$

$$\ln^{(r)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)=\frac{i^r\chi_{rk}}{B_n^r}+\rho_k^{(r)}\left(\frac{t}{B_n}\right), \quad \text{где} \quad \left|\rho_k^{(r)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\frac{|\chi_{r+1,k}|}{B_n^{r+1}}\,|t|,$$

для $r=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1$, и

$$f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)=1+\rho_{0k}\left(\frac{t}{B_n}\right), \quad \text{с} \quad \left|\rho_{0k}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\frac{\sigma_k^2t^2}{2B_n^2},$$

$$f_k^{(s)}\left(\frac{t}{B_n}\right)=\frac{i^s\alpha_{sk}}{B_n^s}+r_{sk}\left(\frac{t}{B_n}\right),$$

которые, очевидно, верны в нашем интервале для всех $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Согласно этим разложениям, равенству (13), а также неравенствам

$$\beta_{rk}\leqslant\beta_{sk}^{\frac{r}{s}}, \quad |\chi_{rk}|\leqslant r^r\beta_{rk}, \quad r=2,\ 3,\ \ldots,\ s, \quad \beta_{sk}\leqslant B_{sn},$$

после несложных подсчетов имеем:

$$\left|\ln^{(s)} f_k\left(\frac{\Theta_k t}{B_n}\right)-\frac{i^s\chi_{sk}}{B_n^s}\right|\leqslant A(s)\left\{\left|r_{sk}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|+\frac{\beta_{sk}}{B_n^s}\left[\frac{|t|\,B_{sn}^{\frac{1}{s}}}{B_n}+\frac{t^2B_{sn}^{\frac{2}{s}}}{B_n^2}\right]\right\}, \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Используя эти неравенства, из соотношений (11) получаем следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^n\left|r_k^{(l)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant A(s)\frac{|t|^{s-l}}{(s-l)!}\left\{\sum_{k=1}^n\left|r_{sk}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|+L_{sn}\left[|t|\,L_{sn}^{\frac{1}{s}}+t^2L_{sn}^{\frac{2}{s}}\right]\right\}, \quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ s.$$

Теперь, обозначив через

$$\delta(B_n, B_{sn}) = 3A(s)\max\left\{\frac{1}{B_n^{\tau}},\quad \frac{2}{B_{sn}}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|>B_n^{1-\tau}}|x|^s dF_k(x),\quad L_{sn}^{\frac{2(s-3)+\gamma}{s[3(s-2)+\gamma]}}\right\},$$

согласно неравенствам (9), при $|t| \leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)+\gamma}}$ имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|r_k^{(l)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \delta(B_n, B_{sn})L_{sn}\frac{|t|^{s-l}}{(s-l)!}\{|t|+1\},\quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ s.$$

Из условия В и условия $L_{sn}\to 0$, при $n\to\infty$, следует, что $\delta(B_n, B_{sn})\to 0$, когда $n\to\infty$.

5. Для доказательства теорем 2 и 3 нам понадобится следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть случайная величина с характеристической функцией $f(t)$ имеет плотность $p(x)$, не превосходящую C, и дисперсию σ^2. Тогда при $|t|\geqslant\pi\sigma^{-1}$*

$$|f(t)| \leqslant \exp\left\{-\frac{\alpha_1}{C^2\sigma^2}\right\},$$

а при $|t|<\pi\sigma^{-1}$

$$|f(t)| \leqslant \exp\left\{-\frac{\alpha_2 t^2}{C^2}\right\}.$$

Здесь $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$ — константы.

Доказательство леммы можно найти в [4].

Лемма 2. *Если случайные величины последовательности (1) удовлетворяют условию $L_{sn}\to 0$, когда $n\to\infty$, то для достаточно больших n и при $|t|\leqslant cL_{3n}^{-1}$ имеют место соотношения*

$$|\bar{f}_n^{(l)}(t)| \leqslant b(l, s)\,e^{-\frac{t^2}{4}}\{|t|^l+1\},\qquad l=0,\ 1,\ \ldots,\ s. \tag{14}$$

Константы $b(l, s)$ равномерно ограничены относительно n.

Доказательство. При $l=0$ неравенство (14) следует из леммы Крамера (см. [1], стр. 93, л. 3).

Имеем

$$\bar{f}_n(t) = \prod_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right).$$

Вводим обозначения:

$$f_{n,k_1}(t) = \prod_{\substack{k=1\\ k\neq k_1}}^{n} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right),\ \ldots,\ f_{n,k_1,\ldots,k_s}(t) = \prod_{\substack{k=1\\ k\neq k_1\neq\ldots\neq k_s}}^{n} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right),\quad s\geqslant 3. \tag{15}$$

Дифференцируя выражения (15), получаем

$$\left.\begin{aligned} \bar{f}_n^{(1)}(t) &= \sum_{k_1=1}^{n} f_{k_1}^{(1)}\left(\frac{t}{B_n}\right) f_{n,k_1}(t),\\ f_{n,k_1,\ldots,k_{l-1}}^{(1)}(t) &= \sum_{\substack{k_l=1\\ k_l\neq k_1\neq\ldots\neq k_{l-1}}}^{n} f_{k_l}^{(1)}\left(\frac{t}{B_n}\right) f_{n,k_1,\ldots,k_l}(t),\quad l=2,\ \ldots,\ s. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Методом индукции легко получается следующая формула:

$$\bar{f}_n^{(l)}(t)=\sum_{j=1}^{l}\sum_{\substack{m_{1j}+\ldots+m_{jj}=l\\ m_{\nu j}>0,\ \nu=1,\ldots,j}} A_{m_{1j},\ldots,m_{jj}}(l)\sum_{k_1=1}^{n} f_{k_1}^{(m_{1j})}\left(\frac{t}{B_n}\right)\ldots$$

$$\sum_{\substack{k_j=1\\ k_j\neq k_1\neq\ldots\neq k_{j-1}}}^{n} f_{k_j}^{(m_{jj})}\left(\frac{t}{B_n}\right) f_{n,k_1,\ldots,k_j}(t) \tag{17}$$

для $l=1, 2, \ldots, s$. Здесь $A_{m_{1j},\ldots,m_{jj}}(l)$ — константы, зависящие только от l. Так как $M\xi_k=0$, $k=1, 2, \ldots,$ и

$$f_k^{(1)}\left(\frac{t}{B_n}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ix}{B_n}e^{\frac{itx}{B_n}}dF_k(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ix}{B_n}dF_k(x)+\frac{i^2t}{B_n^2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{\frac{i\Theta_k tx}{B_n}}dF_k(x),$$

то

$$\left|f_k^{(1)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\frac{\sigma_k^2|t|}{B_n^2},\qquad k=1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f_k^{(1)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant|t|. \tag{18}$$

Кроме того, верны неравенства

$$\left|f_k^{(\nu)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\frac{\beta_{\nu k}}{B_n^{\nu}},\qquad \nu\geqslant 2,\quad k=1, \ldots, n,$$

а следовательно, верны также и неравенства

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f_k^{(\nu)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant L_{\nu n}. \tag{19}$$

Из соотношения (17), согласно неравенствам (18) и (19), легко следует, что

$$|\bar{f}_n^{(l)}(t)|\leqslant B(l)\{1+|t|^l\}\max_{1\leqslant k_1\neq k_2\neq\ldots\neq k_l\leqslant n}|f_{n,k_1,\ldots,k_l}(t)|,\quad l=1, 2, \ldots, s, \tag{20}$$

где $B(l)$ — константы, зависящие только от l.

Оценим $\max\limits_{1\leqslant k_1\neq\ldots\neq k_l\leqslant n}|f_{n,k_1,\ldots,k_l}(t)|$ при $|t|\leqslant cL_{3n}^{-1}$. Функция $f_{n,k_1,\ldots,k_l}(t)$ является характеристической функцией следующей нормированной суммы:

$$S_{n,k_1,\ldots,k_l}=\frac{1}{\sqrt{B_n^2-\sigma_{k_1}^2-\ldots-\sigma_{k_l}^2}}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq k_1\neq\ldots\neq k_l}}^{n}\xi_k$$

в точке

$$t\,\frac{\sqrt{B_n^2-\sigma_{k_1}^2-\ldots-\sigma_{k_l}^2}}{B_n}.$$

Из леммы Крамера (см. [1], стр. 93, л. 3) имеем при $t\,\frac{\sqrt{B_n^2-\sigma_{k_1}^2-\ldots-\sigma_{k_l}^2}}{B_n}\leqslant T_{sn}(l)$ ($T_{sn}(l)$ определим позже) следующие неравенства:

$$|f_{n,k_1,\ldots,k_l}(t)|\leqslant\exp\left\{-\frac{t^2}{3}\left(\frac{B_n^2-\sigma_{k_1}^2-\ldots-\sigma_{k_l}^2}{B_n^2}\right)\right\}.$$

Но, так как $l\leqslant s$ и

$$B_n^2-\sigma_{k_1}-\ldots-\sigma_{k_l}^2\geqslant B_n^2-s\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k^2\geqslant B_n^2-sB_{sn}^{\frac{2}{s}},$$

то и

$$\frac{B_n^2-\sigma_{k_1}^2-\ldots-\sigma_{k_l}^2}{B_n^2} \geqslant 1-s\,(L_{sn})^{\frac{2}{s}}.$$

Согласно условию теоремы $L_{sn}\to 0$, $n\to\infty$, всегда можно найти такое n_0, чтобы при $n\geqslant n_0$ имело место неравенство $s\,(L_{sn})^{\frac{2}{s}}<\frac{1}{4}$. Следовательно, для таких n имеют место неравенства

$$\frac{B_n^2-\sigma_{k_1}^2-\ldots-\sigma_{k_l}^2}{B_n^2} \geqslant \frac{3}{4}, \qquad l=1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

Итак, для $n>n_0$ при $|t|\leqslant \min\limits_{1\leqslant k_1\neq\ldots\neq k_s\leqslant n} T_{sn}(s)$ верны неравенства

$$\max_{1\leqslant k_1\neq\ldots\neq k_l\leqslant n} |f_{n,k_1,\ldots,k_l}(t)|\leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}, \qquad l=1,\ 2,\ \ldots,\ s. \tag{21}$$

Согласно упомянутой лемме Крамера имеем

$$T_{sn}(l)=\frac{[B_n^2-\sigma_{k_1}^2-\ldots-\sigma_{k_l}^2]^{\frac{3}{2}}}{4\,(B_{3n}-\beta_{3k_1}-\ldots-\beta_{3k_l})}.$$

Так как для всех $l=1,\ 2,\ \ldots,\ s$ имеем неравенства

$$T_{sn}(l)\geqslant\frac{B_n^3}{4B_{3n}}\left[1-\frac{s\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k^2}{B_n}\right]^{\frac{3}{2}}\geqslant\frac{1}{4}L_{3n}^{-1}\,[1-sL_{sn}^{\frac{2}{s}}]^{\frac{3}{2}},$$

и согласно условию $L_{sn}\to 0$, $n\to\infty$, можно найти такое m, чтобы для $n\geqslant m$ имело место неравенство

$$[1-sL_{sn}^{\frac{2}{s}}]^{\frac{3}{2}}\geqslant\frac{4}{5},$$

то для таких n будет верно соотношение

$$\min_{1\leqslant k_1\neq\ldots\neq k_s\leqslant n} T_{sn}(s)\geqslant\frac{1}{5}L_{3n}^{-1}\geqslant\frac{1}{5}L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}. \tag{22}$$

Итак, согласно неравенствам (21) и (22), имеем при $|t|\leqslant\frac{1}{5}L_{3n}^{-1}$ и $n>\max(n_0,\ m)$ следующие соотношения:

$$\max_{1\leqslant k_1\neq\ldots\neq k_l\leqslant n} |f_{n,k_1,\ldots,k_l}(t)|\leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}, \qquad l=1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

Используя это неравенство, из соотношения (20) заключаем, что при $|t|\leqslant\frac{1}{5}L_{3n}^{-1}$ и для достаточно больших n верны неравенства

$$|\bar{f}_n^{(l)}(t)\leqslant B(l)\,(1+|t|^l)\,e^{-\frac{t^2}{4}}, \qquad l=1\ \ 2,\ \ldots,\ s,$$

что и доказывает нашу лемму. $\left(\text{Очевидно, в лемме } c\geqslant\frac{1}{5}.\right)$

Так как

$$|f_k^{(1)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\leqslant\frac{M|\xi_k|}{B_n^2}, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

и

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f_k^{(1)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\leqslant\frac{M_{1n}}{B_n},\right. \tag{23}$$

то, используя неравенства (19) и (23), из соотношения (17) получаем следующие неравенства:

$$|\bar f_n^{(l)}(t)| \leqslant B_1(l)\left\{1+\frac{M^l_{ln}}{B_n^l}\right\} \max_{1\leqslant k_1\neq\ldots\neq k_l\leqslant n} |f_{n,k_1,\ldots,k_l}(t)|, \qquad l=1,\ 2\ \ldots,\ s. \tag{24}$$

6. Доказательство теорем 2 и 3.

Докажем только соотношения (3) и (5), так как доказательство соотношений (2) и (4) совершенно аналогичны. Надо лишь вместо теоремы 1 воспользоваться теоремой первой работы [3].

Доказательство соотношения (3). Так как $p_k(x)\leqslant C_k$, $k=1,\ 2,\ \ldots,$ то уже при $n\geqslant 2$, $\bar f_n(t)$ будет функцией интегрируемой (см. [5], стр. 93, т. 48 и [6], стр. 181). Следовательно, для $n>2$ можем воспользоваться формулой обращения и получим

$$2\pi\,|\bar p_n(x)-\varphi_{s,n}(x)|\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|\bar f_n(t)-h_{s,n}(t)|\,dt\leqslant I_1+I_2+I_3+I_4+I_5, \tag{25}$$

где

$$I_1=\int_{|t|\leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)+\gamma}}}|\bar f_n(t)-h_{sn}(t)|\,dt,\qquad I_2=\int_{|t|>L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)+\gamma}}}|h_{sn}(t)|\,dt,$$

$$I_3=\int_{L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)+\gamma}}<|t|\leqslant cL_{3n}^{-1}}|\bar f_n(t)|\,dt,\qquad I_4=\int_{cL_{3n}^{-1}<|t|<\pi B_n(\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k)^{-1}}|f_n(t)|\,dt,$$

$$I_5=\int_{|t|>\pi B_n(\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k)^{-1}}|\bar f_n(t)|\,dt.$$

Согласно теореме 1 имеем:

$$I_1\leqslant\delta_0(B_n,\ B_{sn})\,L_{sn}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{3}}\{|t|^s+|t|^{3(s-2)+1}\}\,dt=o(L_{sn}). \tag{26}$$

Так как

$$|h_{sn}(t)|\leqslant e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\sum_{k=3}^{s}|Q_{kn}(it)|\,L_{kn}\right],$$

где $Q_{kn}(it)$, $k=3,\ \ldots,\ s$ многочлены степени $3(k-2)$ с равномерно относительно n ограниченными коэффициентами, а $L_{kn}\to 0$, $k=3,\ \ldots,\ s$, то

$$I_2=o(L_{sn}). \tag{27}$$

Для оценки I_3 воспользуемся леммой 2 и получим:

$$I_3\leqslant b(0,\ s)\int_{|t|>L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)+\gamma}}}e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt=o(L_{sn}). \tag{28}$$

Из леммы 1 и условия А следует, что при $|t|\geqslant\pi B_n(\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k)^{-1}$ имеет место неравенство

$$|\bar f_n(t)|\leqslant\left|f_1\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\,\left|f_2\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\exp\{-\bar\alpha_1(n-2)\},\qquad \bar\alpha_1=\frac{\alpha_1}{M}.$$

Следовательно, имеем:

$$I_5 \leqslant A B_n \exp\{-\tilde{\alpha}_1 n\} \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)|\,|f_2(t)|\,dt.$$

Согласно неравенству Буняковского, а также соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |p(x)^2|\,dx$$

(см. [5], стр. 68), получаем неравенство

$$I_5 \leqslant 2\pi A \sqrt{C_1 C_2}\, B_n \exp\{-\tilde{\alpha}_1 n\}.$$

Так как $B_n = o(e^{\beta n})$ для любого $\beta > 0$, то имеем

$$I_5 \leqslant 2\pi A \sqrt{C_1 C_2}\, B_n e^{-\frac{\tilde{\alpha}_1}{s+1} n} \left(e^{-\frac{\tilde{\alpha}_1}{s+1} n}\right)^s = o(B_n^{-s}) = o(L_{sn}). \tag{29}$$

Теперь оценим интеграл I_4. Имеем:

$$I_4 = \int\limits_{cL_{3n}^{-1} < |t| < \pi B_n (\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma_k)^{-1}} |\bar{f}_n(t)|\,dt = B_n \int\limits_{c\frac{B_n^2}{B_{3n}} < |t| < \pi (\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma_k)^{-1}} \prod_{k=1}^{n} |f_k(t)|\,dt.$$

Последовательность дисперсий $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ распределяем по порядку возрастания

$$\tilde{\sigma}_1^2 \leqslant \tilde{\sigma}_2^2 \leqslant \ldots \leqslant \tilde{\sigma}_r^2 \leqslant \tilde{\sigma}_{r+1}^2 \leqslant \ldots \leqslant \tilde{\sigma}_n^2.$$

Для каждого n находим число r из следующих условий:

$$\frac{\pi}{\tilde{\sigma}_r} \geqslant c\frac{B_n^2}{B_{3n}}, \quad \text{а} \quad \frac{\pi}{\tilde{\sigma}_{r+1}} < c\frac{B_n^2}{B_{3n}}.$$

Ясно, что r будет зависеть от n. Согласно условию А и лемме 1, имеем при $cB_n^2 B_{3n}^{-1} < |t| < \pi(\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma_k)^{-1}$ следующие неравенства:

$$|f_k(t)| \leqslant \begin{cases} e^{-\frac{\alpha_1}{M}} & \text{для тех } k, \text{ для которых } \dfrac{\pi}{\sigma_k} < \dfrac{cB_n^2}{B_{3n}}, \\[2ex] e^{-\frac{\alpha_2 B_n^4}{C_k^2 B_{3n}^2}} & \text{для тех } k, \text{ для которых } \dfrac{\pi}{\sigma_k} \geqslant \dfrac{cB_n^2}{B_{3n}}. \end{cases}$$

Обозначив через $\tilde{C}_k$ то из C_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, которое соответствует $\tilde{\sigma}_k^2$ (т. е случайной величине последовательности (1), дисперсия которой есть $\tilde{\sigma}_k^2$), получаем при $cB_n^2 B_{3n}^{-1} < |t| < \pi(\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma_k)^{-1}$ следующее соотношение:

$$\prod_{k=1}^{n} |f_k(t)| \leqslant |f_1(t)|\,|f_2(t)| \exp\left\{-\frac{\tilde{\alpha} B_n^4}{B_{3n}^2} \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\tilde{C}_k^2} - \frac{\alpha_1}{M}(n-r-2)\right\},$$

где $\tilde{\alpha} = c\alpha_2$.

Обозначив через

$$\tilde{B}_r^2 = \sum_{k=1}^{r} \tilde{\sigma}_k^2, \quad \tilde{B}_{n-r}^2 \sum_{k=r+1}^{n} \tilde{\sigma}_k^2,$$

получим

$$B_n^2 = \tilde{B}_r^2 + \tilde{B}_{n-r}^2. \tag{30}$$

Из условия А заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\tilde{C}_k^2}\geqslant\frac{\tilde{B}_r^2}{M},$$

следовательно, при $cB_n^2B_{3n}^{-1}<|t|<\pi(\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k)^{-1}$ имеем:

$$\prod_{k=1}^{n}|f_k(t)|\leqslant e^{\frac{2\alpha_1}{M}}|f_1(t)|\,|f_2(t)|\exp\left\{-\frac{\tilde{\alpha}B_n^4}{MB_{3n}^2}\tilde{B}_r^2\right\}\exp\left\{-\frac{\alpha_1}{M}(n-r)\right\}.$$

Поступая так же, как и при оценке I_6, получаем

$$I_4\leqslant e^{\frac{2\alpha_1}{M}}2\pi\sqrt{C_1C_2}B_n\exp\left\{-\frac{\tilde{\alpha}B_n^4}{MB_{3n}^2}\tilde{B}_r^2\right\}\exp\left\{-\frac{\alpha_1}{M}(n-r)\right\}.$$

Рассмотрим выражение

$$B_n\exp\left\{-\frac{\tilde{\alpha}B_n^4}{B_{3n}^2}\tilde{B}_r^2\right\}\exp\left\{-\frac{\alpha_1}{M}(n-r)\right\}.$$

Взяв число $\delta=\frac{s+2}{s}$, последовательность натуральных чисел $\{n\}$ подразделяем на две подпоследовательности $\{n\}=\{n'\}\cup\{n''\}$ следующим образом:

1) $n\in\{n'\}$, если $\frac{\tilde{B}_r^2}{B_n^2}\geqslant L_{3n}^{\delta}$,

2) $n\in\{n''\}$, если $\frac{\tilde{B}_r^2}{B_n^2}<L_{3n}^{\delta}$.

Тогда для $n\in\{n'\}$ будем иметь

$$\frac{B_n^4}{B_{3n}^2}\cdot\tilde{B}_r^2=L_{3n}^{-2}\frac{\tilde{B}_r^2}{B_n^2}\geqslant L_{3n}^{-(2-\delta)}.$$

Используя условие 1 второй теоремы и неравенство $L_{3n}\leqslant L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}$, получаем

$$\frac{B_n^4}{B_{3n}^2}\tilde{B}_r^2\geqslant L_{sn}^{-\frac{2-\delta}{s-2}}\geqslant N_n\ln B_n,\qquad N_n\to\infty,\quad(n\to\infty).$$

Следовательно, для достаточно больших $n\in\{n'\}$ будем иметь

$$I_4\leqslant A_1B_n\exp\left\{-\frac{\tilde{\alpha}}{M}N_n\ln B_n\right\}=A_1B_n^{\left(1-\frac{\tilde{\alpha}}{M}N_n\right)}=o(B_n^{-s})=o(L_{sn}).\tag{31}$$

С другой стороны, так как $L_{3n}\to 0$ при $n\to\infty$, то для достаточно больших $n\in\{n''\}$, имеем $\tilde{B}_r^2=o(B_n^2)$ и, согласно соотношению (30), $B_n^2\leqslant c_1\tilde{B}_{n-r}^2$.

Но $\tilde{B}_{n-r}^2$ является суммой $n-r$ слагаемых, удовлетворяющих тем же условиям, которым удовлетворяют слагаемые суммы B_n^2, т. е. $\frac{\tilde{\sigma}_{n-k}^2}{\tilde{B}_{n-r}^2}\to 0$, $n\to\infty$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-r$. Следовательно, если $n-r\to\infty$, когда $n\to\infty$, то для достаточно больших $n\in\{n''\}$ верно соотношение $\tilde{B}_{n-r}^2=o(e^{\beta(n-r)})$, $\beta>0$, а вместе с тем для таких n и $B_n^2=o(e^{\beta(n-r)})$, $\beta>0$.

Поэтому для достаточно больших $n\in\{n''\}$, если $n-r\to\infty$, когда $n\to\infty$, имеем

$$I_4\leqslant A_1B_n\exp\left\{-\frac{\alpha_1}{M}(n-r)\right\}=o(L_{sn}).\tag{32}$$

Если же в подпоследовательности $\{n''\}$ имеется только конечное число номеров n (сюда будет входить и тот случай, когда $n-r$ конечное при

$n\to\infty$), то, очевидно, для достаточно больших n будет верно соотношение (31).

Итак, согласно соотношениям (31) и (32) для достаточно больших n имеет место соотношение:

$$I_4=o(L_{sn}). \tag{33}$$

Из соотношений (25), (26)–(29) и (33) следует

$$|\bar{p}_n(x)-\varphi_{s,n}(x)|=o(L_{sn}),$$

что и требовалось доказать. Как видно из хода доказательства, символ o не зависит от x.

Доказательство соотношения (5).

Дифференцируя s-раз соотношение

$$\bar{f}_n(t)-h_{s,n}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}[\bar{p}_n(x)-\varphi_{s,n}(x)]\,dx,$$

получаем

$$\bar{f}_n^{(s)}(t)-h_{s,n}^{(s)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}i^sx^s[\bar{p}_n(x)-\varphi_{s,n}(x)]\,dx.$$

Отсюда формально имеем

$$2\pi|x|^s|\bar{p}_n(x)-\varphi_{s,n}(x)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\bar{f}_n^{(s)}(t)-h_{sn}^{(s)}(t)|\,dt\leqslant I_1+I_2+I_3+I_4+I_5, \tag{34}$$

где

$$I_1=\int\limits_{|t|<L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)+\gamma}}}|\bar{f}_n^{(s)}(t)-h_{sn}^{(s)}(t)|\,dt,\qquad I_2=\int\limits_{|t|>L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)+\gamma}}}|h_{sn}^{(s)}(t)|\,dt,$$

$$I_3=\int\limits_{L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)+\gamma}}<|t|<cL_{3n}^{-1}}|\bar{f}_n^{(s)}(t)|\,dt,\qquad I_4=\int\limits_{cL_{3n}^{-1}<|t|<\frac{\pi B_n}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k}}|\bar{f}_n^{(s)}(t)|\,dt,$$

$$I_5=\int\limits_{|t|>\frac{\pi B_n}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k}}|\bar{f}_n^{(s)}(t)|\,dt.$$

В ходе доказательства будет установлено, что все эти интегралы существуют, более того, все они стремятся к нулю при $n\to\infty$. Следовательно, применение формулы обращения законно.

Используя теорему 1, получаем:

$$I_1\leqslant\delta_s(B_n,B_{sn})L_{sn}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{3}}\{1+|t|^{3(s-2)+s+1}\}\,dt=o(L_{sn}). \tag{35}$$

s-ая производная функция $h_{sn}(t)$ имеет вид $e^{-\frac{t^2}{2}}P_{sn}(it)$, где $P_{sn}(it)$ — многочлен степени не выше $3(s-2)+s$ с равномерно относительно n ограниченными коэффициентами. Следовательно, имеем

$$I_2=o(L_{sn}). \tag{36}$$

Согласно лемме 2, получим, что

$$I_3 \leqslant b(s) \int\limits_{|t|>L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)+\gamma}}} e^{-\frac{t^2}{4}} (|t|^s+1)\,dt = o(L_{sn}). \tag{37}$$

Используя условие А и лемму 1, заключаем, что при $|t| \geqslant B_n \pi (\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma_k)^{-1}$ верно неравенство

$$\max_{1\leqslant k_1 \neq \ldots \neq k_s \leqslant n} |f_{n,k_1,\ldots,k_s}(t)| \leqslant \left| f_{r_1}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \left| f_{r_2}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \exp\left\{-\frac{\alpha_1}{M}(n-s-2)\right\}.$$

Следовательно, из неравенств (24) при $l=s$ и при $|t| \geqslant \pi B_n (\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma_k)^{-1}$ получаем:

$$|\bar{f}_n^{(s)}(t)| \leqslant B_1(s) \left\{ 1 + \frac{M_{1n}^s}{B_n^s} \right\} \left| f_{r_1}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \left| f_{r_2}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \exp\left\{-\frac{\alpha_1}{M} n\right\}.$$

Из этого неравенства и неравенства

$$M_{1n} \leqslant \sqrt{n} B_n$$

следует, что

$$I_5 = \int\limits_{|t| \geqslant \frac{\pi B_n}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k}} |\bar{f}_n^{(s)}(t)\,dt \leqslant B_1(s)\left\{1+n^{\frac{s}{2}}\right\} B_n \exp\left\{-\frac{\alpha_1}{M}n\right\} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_{r_1}(t)|\,|f_{r_2}(t)|\,dt.$$

Итак, имеем

$$I_5 = o(L_{sn}). \tag{38}$$

Используя условия 1—3 третьей теоремы, а также лемму 1 и неравенство (24), и рассуждая как при оценке I_4 в первой части доказательства, получаем при $cB_n^3 B_{3n}^{-1} < t < \pi B_r (\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma_k)^{-1}$ следующее неравенство:

$$|\bar{f}_n^{(s)}(t)| \leqslant B_2(s) \left| f_{r_1}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \left| f_{r_2}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \left\{ 1 + \frac{M_{1n}}{B_n^s} \right\} \exp\left\{ -\frac{\tilde{\alpha} B_n^4}{M B_{3n}^2} \tilde{B}_r^2 - \frac{\alpha_1}{M}(n-r) \right\}$$

и неравенство

$$I_4 \leqslant B_2(s)\, 2\pi \sqrt{C_{r_1} C_{r_2}}\, B_n^{s(R-1)+1} \exp\left\{-\frac{\tilde{\alpha} B_n^4}{M B_{3n}^2} \tilde{B}_r^2\right\} \exp\left\{-\frac{\alpha_1}{M}(n-r)\right\}.$$

Исследуя выражение

$$B_n^{s(R-1)+1} \exp\left\{-\frac{\tilde{\alpha} B_n^4}{M B_{3n}^2} \tilde{B}_r^2\right\} \exp\left\{-\frac{\alpha_1}{M}(n-r)\right\}$$

таким же образом, как и в первой части доказательства, получим, что

$$I_4 = o(L_{sn}). \tag{39}$$

Из соотношения (34)—(39) следует, что равномерно относительно x при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$|x|^s |p_n(x) - \varphi_{s,n}(x)| = o(L_{sn}).$$

В первой части при более общих условиях мы доказали, что равномерно относительно x при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$|p_n(x) - \varphi_{s,n}(x)| = o(L_{sn}).$$

Следовательно, при $n \to \infty$ равномерно относительно x имеет место соотношение

$$(1+|x|^s)\,|p_n(x)-\varphi_{s,n}(x)|=o(L_{sn}),$$

что и доказывает соотношение (5).

7. Теорема 4 доказывается возведением в степень соотношений (4) и (5) и интегрированием полученных выражений.

Доказательство теоремы 5.

Докажем лишь первую часть теоремы. Вторая часть доказывается аналогично.

Согласно соотношению (4) имеем при $|x|\geqslant 1$ следующее соотношение

$$|p_n(x)-\varphi_{s-1,n}(x)|=\frac{O(L_{sn})}{|x|^s}.$$

Поэтому при $x\leqslant -1$ имеем:

$$|\bar F_n(x)-\Phi_{s-1,n}(x)|=\left|\int\limits_{-\infty}^{x}[p_n(u)-\varphi_{s-1,n}(u)]\,du\right|\leqslant O(L_{sn})\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{du}{|u|^s}=\frac{O(L_{sn})}{1+|x|^{s-1}}.$$

При $x\geqslant 1$ также получаем:

$$|\bar F_n(x)-\Phi_{s-1,n}(x)|=|[1-\Phi_{s-1,n}(x)]-[1-\bar F_n(x)]|=$$

$$=\left|\int\limits_{x}^{\infty}[\varphi_{s-1,n}(u)-p_n(u)]\,du\right|\leqslant O(L_{sn})\int\limits_{x}^{\infty}\frac{du}{u^s}=\frac{O(L_{sn})}{1+|x|^{s-1}}.$$

Для $|x|<1$, очевидно,

$$|\bar F_n(x)-\Phi_{s-1,n}(x)|=\left|\int\limits_{-\infty}^{-1}[p_n(u)-\varphi_{s-1,n}(u)]\,du+\int\limits_{-1}^{x}[\bar p_n(u)-\varphi_{s-1,n}(u)]\,du\right|\leqslant$$

$$\leqslant O(L_{sn})\left[\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{du}{|u|^s}+\int\limits_{-1}^{1}du\right]=O(L_{sn})=\frac{O(L_{sn})}{1+|x|^{s-1}}.$$

Следовательно, равномерно относительно x и при $n\to\infty$ верно соотношение

$$(1+|x|^{s-1})\,|\bar F_n(x)-\Phi_{s-1,n}(x)|=O(L_{sn}).$$

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность В. А. Статулявичюсу за внимание к данной работе и советы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
25.V.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Крамер. Случайные величины и распределения вероятностей, Москва, 1947.
2. В. А. Статулявичюс. Об асимптотическом разложении характеристической функции суммы независимых случайных величин, Лит. матем. сборник, 2, 2 (1962), 225–232.
3. П. Сурвила. Остаточный член в асимптотическом разложении для плотностей, Лит. матем. сборник, 2, 2 (1962), 233–251.
4. П. Сурвила. О локальной предельной теореме для плотностей, Лит. матем. сборник, 3, 1 (1963).
5. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, М. 1948 Л.
6. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, Москва, 1957.

TANKIŲ ASIMPTOTINIAI IŠDĖSTYMAI

P. SURVILA

(Reziumė)

Darbe įrodomi nepriklausomų atsitiktinių dydžių normuotų sumų pasiskirstymų tankių asimptotiniai išdėstymai pagal Liapunovo trupmenas (2 ir 3 teoremos). Kartu pateikiami taip pat normuotos sumos charakteringosios funkcijos išvestinių asimpto'iniai išdėstymai (1 teorema).

DIE ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG FÜR DEN DICHTEFUNKTIONEN

P. SURWILA

(Zusammenfassung)

Im vorliegenden Artikel gibt man die asymptotische Entwicklung für den Dichtefunktionen (Theoremen 2 und 3) und für den Ableitungen der charakteristischen Funktionen (Theoreme I) der normierten Summen unabhängigen Zufallsgrößen.