IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
1964

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПАР КОМПЛЕКСОВ

К. И. ГРИНЦЕВИЧЮС

В этой заметке построена такая пара комплексов прямых, которая характеризуется понятиями, аналогичными понятиям расслояемой пары конгруэнции [1].

1. Пусть ребра $l=A_1A_2$ и $l^*=A_3A_4$ подвижного репера $\{A_i\}$ $(i, j, k=1, 2, 3, 4)$ в трехмерном проективном пространстве описывают два комплекса прямых (l) и (l^*).

Инфинитезимальное перемещение репера $\{A_i\}$ определяется уравнениями $dA_i=\omega_i^k A_k$, где $D\omega_i^j=[\omega_i^k\omega_k^j]$.

Тогда комплекс (l) будет определен дифференциалными уравнениями

$$\lambda_\alpha^p\omega_p^\alpha=0, \quad [\Delta\lambda_\alpha^p\omega_p^\alpha]=0, \tag{1}$$

а комплекс (l^*) — уравнениями

$$\lambda_p^\alpha\omega_\alpha^p=0, \quad [\Delta\lambda_p^\alpha\omega_\alpha^p]=0, \tag{2}$$

где

$$p,\ q,\ r=1,\ 2; \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma=3,\ 4;$$
$$\Delta\lambda_\alpha^p=d\lambda_\alpha^p+\lambda_\alpha^q\omega_q^p-\lambda_\beta^p\omega_\alpha^\beta,$$
$$\Delta\lambda_p^\alpha=d\lambda_p^\alpha+\lambda_p^\beta\omega_\beta^\alpha-\lambda_q^\alpha\omega_p^q.$$

Из рассмотрения исключаются комплексы прямых, являющихся касательными к поверхностям, т. е. предполагается, что

$$A=\lambda_4^2\lambda_3^1-\lambda_4^1\lambda_3^2\neq0, \quad B=\lambda_1^3\lambda_2^4-\lambda_1^4\lambda_2^3\neq0.$$

2. Уравнением

$$L_{22}t\tau+(L_{12}+L)\,t+(L_{12}-L)\,\tau+L_{11}=0, \tag{3}$$
$$(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)\,L\neq0$$

задаем проективное соответствие между точками

$$M=A_1+tA_2 \quad \text{и} \quad N=A_1+\tau A_2 \tag{4}$$

луча l.

Инвариантность проективного соответствия (3) относительно изменения вторичных параметров, характеризуется дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}&\delta L_{pq}-L_{pr}\pi_q^r-L_{rq}\pi_p^r=L_{pq}\pi,\\ &\delta L-L\pi_p^p=L\pi, \quad L_{12}=L_{21},\end{aligned} \tag{5}$$

где δ — символ дифференцирования относительно вторичных параметров, $\pi_i^j=\omega_i^j(\delta)$, а форма π — пропорциональный множитель.

Если каждой точке луча l ставить в соответствие плоскость, проходящую через нее и луч l^*, то проективное соответствие (3) порождает проективное соответствие

$$L_{22}\lambda\mu+(L_{12}+L)\lambda+(L_{12}-L)\mu+L_{11}=0 \tag{6}$$

между плоскостями

$$x^2=\lambda x^1 \quad \text{и} \quad x^2=\mu x^1$$

пучка, осью которого является луч l^*.

3. При перемещении луча l внутри комплекса (1) точки (4) также движутся. Потребуем, чтобы пара плоскостей

$$(l^*,\ M+dM),\quad (l^*,\ N+dN)$$

удовлетворяла проективному соответствию (6). Это требование характеризуется условием

$$\begin{aligned}&L_{22}(t+dt+t\omega_2^2+\omega_1^2)\ (\tau+d\tau+\tau\omega_2^2+\omega_1^2)+\\&+(L_{12}+L)\ (t+dt+t\omega_2^2+\omega_1^2)\ (1+\omega_1^1+\tau\omega_2^1)+\\&+(L_{12}-L)\ (\tau+d\tau+\tau\omega_2^2+\omega_1^2)\ (1+\omega_1^1+t\omega_2^1)+\\&+L_{11}(1+\omega_1^1+t\omega_2^1)\ (1+\omega_1^1+\tau\omega_2^1)\cong 0.\end{aligned}$$

Это уравнение можно получить геометрически и другим путем, а именно удовлетворяя требованию, чтобы пара точек M' и N', где M' и N' — точки пересечения луча l с плоскостями $(l^*,\ M+dM)$ и $(l^*,\ N+dN)$, принадлежала проективному соответствию (3).

В этом уравнении выражение нулевого порядка исчезает (в силу (3)), а приравняв нулю выражение первого порядка, получаем уравнение

$$\begin{aligned}&L_{22}\,t\,(d\tau+\tau\omega_2^2+\omega_1^2)+L_{22}\,\tau\,(dt+t\omega_2^2+\omega_1^2)+\\&\quad+(L_{12}+L)\ \{\,t\,(\omega_1^1+\tau\omega_2^1)+dt+t\omega_2^2+\omega_1^2\,\}+\\&\quad+(L_{12}-L)\ \{\,\tau\,(\omega_1^1+t\omega_2^1)+d\tau+\tau\omega_2^2+\omega_1^2\,\}+\\&\quad+L_{11}(2\omega_1^1+\tau\omega_2^1+t\omega_2^1)=0.\end{aligned} \tag{7}$$

Из (7) и (3) следует, что

$$dL_{pq}-L_{pr}\,\omega_p^r-L_{rq}\,\omega_p^r=L_{pq}\,\Theta,\quad dL-L\omega_p^p=L\Theta. \tag{8}$$

Из уравнений (8), как и должно быть, следуют уравнения (5).

4. Уравнения (8) означают, что с каждым лучом комплекса (l) ассоциировано билинейно-метрическое пространство линейных элементов [2].

Внешнее дифференцирование уравнений (8) дает:

$$\begin{aligned}&L_{11}\,[\,\omega_1^\alpha\,\omega_\alpha^1-\omega_2^\alpha\,\omega_\alpha^2\,]+2L_{12}\,[\,\omega_1^\alpha\,\omega_\alpha^2\,]=0,\\&L_{22}\,[\,\omega_1^\alpha\,\omega_\alpha^2\,]+L_{11}\,[\,\omega_2^\alpha\,\omega_\alpha^1\,]=0,\\&L_{22}\,[\omega_2^\alpha\,\omega_\alpha^2-\omega_1^\alpha\,\omega_\alpha^1\,]+2L_{12}\,[\,\omega_2^\alpha\,\omega_\alpha^1\,]=0,\\&D\Theta=[\,\omega_\alpha^p\,\omega_p^\alpha\,].\end{aligned} \tag{9}$$

Ранг определителя из коэффициентов первых трех уравнений системы (9) равен 2 и поэтому эта система состоит из трех независимых уравнений.

Из уравнений (8) следует, что

$$\frac{d(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)}{L_{11}L_{22}-L_{12}^2}=2\frac{dL}{L}, \tag{10}$$

откуда имеем

$$L_{11}L_{22}-L_{12}^2=cL^2, \quad c=\text{const}\neq 0. \tag{11}$$

Соотношение (11) является частным случаем более общего соотношения, полученного Вацловасом Близникасом в [2] (стр. 102).

Уравнения (9) определяют связь между формами ω_p^α и ω_α^p. Следовательно, соответствие между лучами комплексов (l) и (l^*) взаимно однозначно.

5. Система дифференциальных уравнений (1), (2), (8) и (9) находится в инволюции с характерами $s_1=s_2=4$, $s_3=1$ $(Q=N=15)$ и ее решение определяет пару комплексов $(l\to l^*)$ с произволом одной функции трех аргументов.

Двойные точки

$$P=A_1+\rho A_2, \quad \text{где} \quad L_{22}\rho^2+2L_{12}\rho+L_{11}=0, \tag{12}$$

проективного соответствия (3) описывают голономные поверхности. Действительно, из уравнения (12) следует, что

$$dP=(\omega_1^1+\rho\omega_2^1)\,P+(\omega_1^\alpha+\rho\omega_2^\alpha)\,A_\alpha\,.$$

Касательные плоскости поверхностей P пересекаются по лучу l^*.

Если на луче l задано произвольное соответствие (3), удовлетворяющее уравнениям (8), то пару комплексов (l) и (l^*) обозначим $(l\to l^*)$ и назовем расслояемой посредством проективитета в направлении $l\to l^*$.

Вместо вполне интегрируемого уравнения $d\rho+\rho(\omega_2^2-\omega_1^1)+\omega_1^2-\rho^2\omega_2^1=0$ (см. [1] стр. 67), определяющего семейство расслояющих поверхностей, здесь мы имеем вполне интегрируемое уравнение, определяющее семейство трехмерных многообразий проективных соответствий. Это семейство многообразий проективных соответствий зависит от двух поверхностей (действительных или мнимых), описываемых двойными точками (12).

6. Пусть $L_{\alpha\beta}$, L^* аналогичным образом определяют проективное соответствие между точками луча l^* и удовлетворяют уравнениям (см. (8))

$$\begin{aligned} &dL_{\alpha\beta}-L_{\alpha\gamma}\,\omega_\beta^\gamma-L_{\gamma\beta}\,\omega_\alpha^\gamma=L_{\alpha\beta}\,\Theta^*,\\ &dL^*-L^*\,\omega_\alpha^\alpha=L^*\,\Theta^*,\\ &L_{34}=L_{43}, \quad (L_{33}L_{44}-L_{34}^2)\,L^*\neq 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Из уравнений (9) и аналогичных уравнений для комплекса (l^*) следует, что пара комплексов $(l\rightleftarrows l^*)$ будет определена уравнениями (1), (8), (13) и

$$\begin{aligned} &(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)\,\omega_\alpha^1=2\mu\,L_{\alpha\beta}\,L_{2\,[1}\,\omega_{2]}^\beta\,,\\ &(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)\,\omega_\alpha^2=-2\mu\,L_{\alpha\beta}\,L_{1\,[1}\,\omega_{2]}^\beta\,,\\ &d\ln\frac{L^*\mu}{L}+\omega_p^p-\omega_\alpha^\alpha=0. \end{aligned} \tag{14}$$

Система уравнений (1), (8), (13) и (14) находится в инволюции и определяет пару комплексов $(l\rightleftarrows l^*)$ с произволом одной функции от трех аргументов $(s_1=s_2=s_3=1,\ Q=N=6)$.

Если первый комплекс задан, то второй комплекс (l^*), соответствие между лучами l и l^*, два семейства многообразий проективных соответствий между точками на лучах l и l^* определяются с произволом одинадцати постоянных. Девять из этих постоянных определяют неподвижную квадрику

$$L_{pq} x^p x^q + \mu L_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0,$$

описываемую двойными точками проективных соответствий на лучах l и l^*. Лучи l и l^* пары ($l \rightleftarrows l^*$) являются полярно-сопряженными относительно этой квадрики.

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
29.VII.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников. Теория пар конгруэнций, М., 1956.
2. В. Близникас. К дифференциальной геометрии билинейно-метрических пространств линейных элементов, Учен. зап. Вильн. гос. ун-та, 1960, т. **33**, сер. физ. мат., **9**, 97 106.

APIE VIENĄ KOMPLEKSŲ DVEJETŲ UŽDAVINĮ

K. GRINCEVIČIUS

(*Reziumė*)

Straipsnyje gautas kompleksų tiesių dvejetas. Jis definuojamas (1), (8), (13) ir (14) difelinėmis lygtimis. Dvejeto laisvumas yra trijų argumentų viena funkcija. Kai vienas :ksas duotas, tai dvejeto antrasis kompleksas ir pareinamybė tarp tiesių priklauso nuo ıtantų.

ÜBER EINE AUFGABE VOM KOMPLEXEPAAR

K. GRINCEVIČIUS

(*Zusammenfassung*)

In vorliegendem Artikel ist ein Strahlenkomplexepaar erhalten. Es wird durch Differentialgleichungen (1), (8), (13) und (14) definiert. Die Freiheit des Paares ist eine Funktion von drei Argumenten. Ist ein Komplex gegeben, so hängt der zweite Komplex und der Zusammenhang zwischen den Strahlen von elf Konstanten ab.