V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1965

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

Б. В. КВЕДАРАС, А. В. КИБЕНКО и А. И. ПЕРОВ

Весьма общий метод доказательства теорем существования и единственности решений различных краевых задач был предложен в [1].

В настоящей заметке этот метод применяется к краевым задачам для систем дифференциальных уравнений первого и второго порядков и уравнения четвертого порядка.

§ 1. Обобщенное линейное нормированное пространство

Множество E элементов x называется обобщенным линейным нормированным пространством (см. [2]), если E – линейное пространство и каждому элементу $x \in E$ можно поставить в соответствие неотрицательный вектор $\|x\| \in E_n$, называемый обобщенной нормой x.

При этом выполняются следующие условия.

1. $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$.
2. $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ для любых $x \in E$ и α.
3. $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ для любых $x,\ y \in E$.

Упорядоченность здесь понимается покоординатно: $\xi \leqslant \eta$, если $\xi_i \leqslant$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Матрицу $A=(a_{ij})$ будем называть неотрицательной $A \geqslant 0$ (положительной $A>0$), если все ее элементы a_{ij} неотрицательны (положительны). Под матрицей $|A|$ понимается матрица $|A|=|a_{ij}|$. Если $A=a_{ij}$ и $B=b_{ij}$ две матрицы, то $A \geqslant B$ $(A>B)$, если $A-B \geqslant 0$ $(A-B>0)$.

Неотрицательная матрица $S=(s_{ij})$ называется a-матрицей, если все главные миноры матрицы $I-S$ (I – единичная матрица) положительны.

Матрица $B=(b_{ij})$ называется K-матрицей, (см. [3]), если все ее элементы, стоящие вне главной диагонали неположительны, а главные миноры положительны.

Лемма 1. *Для того чтобы матрица $S \geqslant 0$ была a-матрицей, необходимо и достаточно, чтобы матрица $I-S$ была K-матрицей.*

Лемма 2. *Для того чтобы матрица $S \geqslant 0$ была a-матрицей, необходимо и достаточно, чтобы ее спектр лежал внутри единичного круга. (Отсюда следует, что $S^m \to 0$.)*

Лемма 3. *Пусть $S \geqslant 0$ a-матрица. Тогда в E_n можно ввести скалярное произведение $(\xi,\ \eta)_0$, в котором*

$$\|S\xi\|_0 \leqslant q\|\xi\|_0 \qquad (q<1)$$

и, если

$$0 \leqslant \xi \leqslant \eta, \quad \text{то} \quad \|\xi\|_0 \leqslant \|\eta\|_0.$$

Доказательство лемм 1—3 и используемые нами обозначения можно найти в [2].

Пусть A линейный оператор в E. Верхней гранью оператора A называется неотрицательная матрица S, такая, что

$$\|Ax\| \leqslant S\|x\| \qquad (x \in E).$$

Наименьшая из верхних граней (если такая существует) называется нормой оператора A.

Приведем следующий пример. Пусть E_n n-мерное векторное пространство над полем комплексных чисел, и $0 < r \leqslant n$ положительное целое число. Обозначим через $P_1, P_2, \ldots, P_r$ проекторы (см. [4]) в E_n, $\sum\limits_{i=1}^{r} P_i = I$. Пусть $E_i = P_i E_n$ и $\|x\|_i$ норма в E_i. Очевидно, пространство E_n становится линейным обобщенным нормированным пространством, если норму в нем ввести следующим образом:

$$\|x\| = (\|P_1 x\|_1, \ \ldots, \ \|P_r x\|_r).$$

Пусть A линейный оператор в E_n. Положим

$$s_{ij} = \sup_{\|P_j x\|_j \leqslant 1} \{\|P_i A P_j x\|_j\} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, r).$$

Нетрудно показать (см. [3]), что матрица $S = (s_{ij})$ является нормой линейного оператора A в E_n.

В обобщенном нормированном пространстве E сходящиеся и фундаментальные последовательности определяются обычным образом, только под ε нужно понимать теперь вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ с положительными координатами. Также, как и обычно, определяются открытые, замкнутые и компактные множества и полнота пространства.

Хорошо известные принцип сжатых отображений и принцип Шаудера в обобщенном нормированном пространстве формулируются (см. [1, 4]) следующим образом.

Теорема 1. *Пусть нелинейный, вообще говоря, оператор $P(x)$ отображает в седя замкнутое множество F полного обобщенного нормированного пространства E, причем*

$$\|P(x) - P(y)\| \leqslant S\|x - y\| \qquad (x, y \in F),$$

где неотрицательная матрица S является а-матрицей.

Тогда оператор $P(x)$ имеет в F единственную неподвижную точку, которая может быть получена методом последовательных приближений

$$x_{m+1} = P(x_m) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

отправляясь от любого элемента $x_0 \in F$, и имеет место оценка

$$\|x_{m+1} - x^*\| \leqslant (I - S)^{-1} S^m \|x_1 - x_0\| \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Теорема 2. *Пусть вполне непрерывный оператор $P(x)$ отображает ограниченное, замкнутое, выпуклое множество $F \subset E$ в себя.*

Тогда оператор P имеет в F по крайней мере одну неподвижную точку.

§ 2. Краевая задача для системы дифференциальных уравнений с интегральными условиями

В этом параграфе устанавливаются некоторые достаточные условия существования и единственности решений следующей краевой задачи

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n), \tag{1}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

$$\int_a^b \alpha_i(t)\,x_i(t)\,dt=0. \tag{2}$$

Задачи такого типа для линейных систем дифференциальных уравнений изучались в работах И. Д. Тамаркина [5] и М. Паньи [6]. Мы рассматриваем нелинейный случай.

1. Построим функцию Грина краевой задачи

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t), \tag{3}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$\int_a^b \alpha_i(t)\,x_i(t)\,dt=0 \tag{4}$$

где функции $f_i(t)$ и $\alpha_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ определены и суммируемы на отрезке $[a,\ b]$ и

$$\Delta_i=\int_a^b \alpha_i(t)\,dt\neq 0. \tag{5}$$

Из (3) получаем

$$x_i(t)=\int_a^t f_i(s)\,ds+x_i(a). \tag{6}$$

Подставляя значение $x_i(t)$ по формулам (6) в соотношение (4), имеем

$$\int_a^b \alpha_i(t)\left[\int_a^t f_i(s)\,ds+x_i(a)\right]dt=\int_a^b \alpha_i(t)\int_a^t f_i(s)\,ds\,dt+x_i(a)\int_a^b \alpha_i(t)\,dt.$$

Функция $\int_a^t f_i(s)\,ds$ как интеграл от суммируемой функции $f_i(s)$ является абсолютно непрерывной, поэтому существует двойной интеграл и применима теорема Фубини. Меняя порядок интегрирования в первом слагаемом правой части последнего соотношения, приходим к выражению

$$\int_a^b \alpha_i(t)\,x_i(t)\,dt=\int_a^b f_i(s)\int_s^b \alpha_i(t)\,dt\ \ ds+\Delta_i\,x_i(a).$$

Введем обозначения

$$\beta_i(t)=\int_a^t \alpha_i(s)\,ds. \tag{7}$$

В силу (4)

$$\int_a^b \alpha_i(t)\,x_i(t)\,dt=\int_a^b f_i(s)\,[\Delta_i-\beta_i(s)]\,ds+\Delta_i x_i(a)=0.$$

Отсюда и условия (5)

$$x_i(a)=-\int_a^b \frac{\Delta_i-\beta_i(s)}{\Delta_i} f_i(s)\,ds.$$

Подставляя теперь значения $x_i(a)$ в формулы (6), получаем

$$x_i(t)=\int_a^t f_i(s)\,ds-\int_a^b \frac{\Delta_i-\beta_i(s)}{\Delta_i} f_i(s)\,ds. \tag{8}$$

С другой стороны

$$x_i(t)=x_i(b)-\int_t^b f_i(s)\,ds. \tag{9}$$

Отсюда, как и выше, имеем

$$x_i(b)=\int_a^b \frac{\beta_i(s)}{\Delta_i} f_i(s)\,ds.$$

Тогда из (9)

$$x_i(t)=\int_a^b \frac{\beta_i(s)}{\Delta_i} f_i(s)\,ds-\int_t^b f_i(s)\,ds. \tag{10}$$

Так как выражения (8) и (10) представляют одну и ту же функцию, то

$$x_i(t)=\frac{1}{2}\int_a^t f_i(s)\,ds-\frac{1}{2}\int_a^b \frac{\Delta_i-\beta_i(s)}{\Delta_i} f_i(s)\,ds+\frac{1}{2}\int_a^b \frac{\beta_i(s)}{\Delta_i} f_i(s)\,ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_t^b f_i(s)\,ds=\frac{1}{2}\int_a^t \left[1-\frac{\Delta_i-\beta_i(s)}{\Delta_i}+\frac{\beta_i(s)}{\Delta_i}\right] f_i(s)\,ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_t^b \left[\frac{\Delta_i-\beta_i(s)}{\Delta_i}-\frac{\beta_i(s)}{\Delta_i}+1\right] f_i(s)\,ds=\int_a^t \frac{\beta_i(s)}{\Delta_i} f_i(s)\,ds-\int_t^b \left[1-\frac{\beta_i(s)}{\Delta_i}\right] f_i(s)\,ds.$$

Из проведенных рассуждений вытекает (см. [7]), что каждое решение задачи (3)—(4) однозначно представимо в виде

$$x_i(t)=\int_a^b G_i(t,\ s) f_i(s)\,ds, \tag{11}$$

где

$$G_i(t,\ s)=\begin{cases} \dfrac{\beta_i(s)}{\Delta_i} & \text{при} \quad s<t, \\[2ex] \dfrac{\beta_i(s)}{\Delta_i}-1 & \text{при} \quad s>t. \end{cases} \tag{12}$$

Функция $G_i(t,\ s)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ обладает следующими свойствами:

1) $G_i(t,\ s)$ определены и непрерывны при $a\leqslant s,\ t\leqslant b$ всюду, за исключением точек $t=s$, где они терпят разрывы первого рода;

2) при всех $t\neq s$ $\dfrac{\partial G_i(t,\ s)}{\partial t}=0$;

3) производные $\dfrac{\partial G_i(t,\ s)}{\partial s}$ определены всюду при $a\leqslant s\leqslant b$, не зависят от t и

$$\frac{\partial G_i(t,\ s)}{\partial s}=\alpha_i(s);$$

4) так как в силу (7) $\beta_i(a)=0$ и $\beta_i(b)=\Delta_i$, то из (12) вытекает
$$G_i(t,\ a)=G_i(t,\ b)=0;$$
5) функции $G_i(t,\ s)$ удовлетворяют по s краевым условиям (4), то-есть
$$\int_a^b \alpha_i(s)\,G_i(t,\ s)\,ds=0.$$

В самом деле, из последних двух свойств функций $G_i(t,\ s)$ следует
$$\int_a^b \alpha_i(s)\,G_i(t,\ s)\,ds=\int_a^b G_i(t,\ s)\frac{\partial G_i(t,\ s)}{\partial s}\,ds=\frac{1}{2}\,G_i^2(t,\ s)\Big|_{s=a}^{s=b}=0.$$

Диагональную матрицу – функцию $G(t,\ s)=\big(G_i(t,\ s)\big)$, *элементы которой* $G_i(t,\ s)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ *определены по формулам* (12) *и обладают свойствами* 1)–5), *будем называть функцией Грина краевой задачи* (3)–(4).

Приведем оценки для решений $x_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ задачи (3)–(4) в функциональных пространствах $C[a,\ b]$, $L_1[a,\ b]$ и $L_p[a,\ b]$ $(1<p<\infty)$, в которых норма элемента $u(t)$ определяется соответственно:
$$\|u(t)\|_C=\max_{t\in[a,\ b]}|u(t)|,\ \ \|u(t)\|_1=\int_a^b|u(t)|\,dt,\ \ \|u\|_p=\Big[\int_a^b|u(t)|^p\,dt\Big]^{1/p}.$$

Лемма 4. *Пусть* $f_i(t)\in C_{[a,\ b]}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. *Тогда*
$$\|x_i(t)\|_C\leqslant l_i\,\|f_i(t)\|_C, \tag{13}$$
где
$$l_i=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\Big|\int_a^b\frac{\beta_i(s)}{\Delta_i}\,ds-(b-t)\Big|.$$

Доказательство. Из (11) имеем
$$\|x_i(t)\|_C=\Big\|\int_a^b G_i(t,\ s)f_i(s)\,ds\Big\|_C=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\Big|\int_a^t\frac{\beta_i(s)}{\Delta_i}f_i(s)\,ds-$$
$$-\int_t^b\frac{\Delta_i-\beta_i(s)}{\Delta_i}f_i(s)\,ds\Big|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\Big|\int_a^b\frac{\beta_i(s)}{\Delta_i}\,ds-(b-t)\Big|\,\|f(t)\|_C=l_i\,\|f_i(t)\|_C.$$
Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $f_i(t)\in L_1$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.
Тогда
$$\|x_i(t)\|_1\leqslant m_i\,\|f_i(t)\|_1, \tag{14}$$
где
$$m_i=\Big(\Big\|\frac{\beta_i(s)}{\Delta_i}\Big\|_C+\Big\|1-\frac{\beta_i(s)}{\Delta_i}\Big\|_C\Big)\cdot h.$$

Доказательство. Из (11) получаем
$$\|x_i(t)\|_1\leqslant\int_a^b\Big|\int_a^t\frac{\beta_i(s)}{\Delta_i}f_i(s)\,ds-\int_t^b\frac{\Delta_i-\beta_i(s)}{\Delta_i}f_i(s)\,ds\Big|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\int_a^b\Big|\int_a^t\frac{\beta_i(s)}{\Delta_i}f_i(s)\,ds\Big|\,dt+\int_a^b\Big|\int_t^b\frac{\Delta_i-\beta_i(s)}{\Delta_i}f_i(s)\,ds\Big|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\int_a^b\int_a^t\Big|\frac{\beta_i(s)}{\Delta_i}f_i(s)\Big|\,ds\,dt+\int_a^b\int_t^b\Big|\frac{\Delta_i-\beta_i(s)}{\Delta_i}f_i(s)\Big|\,ds\,dt.$$

Меняя порядок интегрирования, что законно в силу теоремы Фубини, приходим к оценке

$$\|x_i(t)\|_1 \leqslant \int_a^b \int_s^b \left| \frac{\beta_i(s)}{\Delta_i} f_i(s) \right| dt\, ds + \int_a^b \int_a^s \left| \frac{\Delta_i - \beta_i(s)}{\Delta_i} f_i(s) \right| dt\, ds =$$

$$= \int_a^b (b-s) \left| \frac{\beta_i(s)}{\Delta_i} f_i(s) \right| ds + \int_a^b (s-a) \left| \frac{\Delta_i - \beta_i(s)}{\Delta_i} f_i(s) \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b (b-s) \left| \frac{\beta_i(s)}{\Delta_i} \right| |f_i(s)|\, ds + \int_a^b (s-a) \left| \frac{\Delta_i - \beta_i(s)}{\Delta_i} \right| |f_i(s)|\, ds \leqslant h \left[\left\| \frac{\beta_i(t)}{\Delta_i} \right\|_C + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{\Delta_i - \beta_i(t)}{\Delta_i} \right\|_C \right] \|f_i(t)\|_1,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 6. *Пусть* $f_i(t) \in L_{p_i}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. *Тогда*

$$\|x_i(t)\|_{p_i} \leqslant k_i \|f_i(t)\|_{p_i}, \tag{15}$$

где

$$k_i = \left(\left\| \frac{\beta_i(s)}{\Delta_i} \right\|_{q_i} + \left\| 1 - \frac{\beta_i(s)}{\Delta_i} \right\|_{q_i} \right) h^{1/p_i}, \qquad \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1.$$

Справедливость леммы 6 вытекает из (11) последовательным применением неравенств Минковского и Гельдера.

Если $\alpha_i(t) \geqslant 0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ или $\alpha_i(t) \leqslant 0$, то $\frac{\beta_i(s)}{\Delta_i} \leqslant 1$ и $\frac{\beta_i(s)}{\Delta_i} \geqslant 0$, поэтому в оценках (13)–(15) константы l_i, m_i и k_i принимают вид

$$l_i = h, \quad m_i = 2h, \quad k_i = \frac{2h}{p_i^{1/p_i}}. \tag{16}$$

Если же $\alpha_i(t) = c_i$, то можно взять $\alpha_i(t) \equiv 1$ и тогда $\Delta_i = b - a = h$,

$$\beta_i(s) = \beta(s) = s - a, \quad \Delta_i - \beta_i(s) = h - \beta(s) = b - s$$

и

$$l_i = \frac{h}{2}, \quad m_i = \frac{h}{2}, \quad k_i = \frac{2^{1/q_i} h}{p_i^{1/p_i} (1+q_i)^{1/q_i}}. \tag{17}$$

3. Рассмотрим теперь нелинейную краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ x), \tag{1}$$

$$\int_a^b \alpha_i(t) x_i(t) dt = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2}$$

Возьмем в качестве основного пространства обобщенное пространство L_p, $p=(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)$ $(1 < p_i < +\infty)$, в котором норма

$$\|x(t)\|_p = \left(\|x_1(t)\|_{p_1},\ \ldots,\ \|x_n(t)\|_{p_n} \right).$$

Теорема 3. *Пусть функции* $f_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ *определены при* $a \leqslant t \leqslant b$ и $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ *и удовлетворяют условиям Каратеодори — измеримы по* t *при каждом фиксированном* x *и непрерывны по* x *при каждом фиксированном* t. *Пусть выполнены неравенства*

$$|f_i(t,\ x)| \leqslant \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) |x_j| + b_i(t), \tag{18}$$

где $0 \leqslant b_i(t) \in L_{p_i}$, $0 \leqslant a_{ij}(t) \in L_{q_j}\left(\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}=1\right)$

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^b |G_i(t,\ s)\,a_{ij}(s)|^{q_j}\,ds\right)^{p_i/q_j} dt\right]^{1/p_i}\right) \leqslant (s_{ij}) = S, \tag{19}$$

где $S=(s_{ij})$ *некоторая неотрицательная α-матрица.*

Тогда задача (1)–(2) *имеет по крайней мере одно решение и справедлива оценка*

$$\|x(t)\|_p \leqslant (I-S)^{-1}\left\|\int_a^b G(t,\ s)\,ds\right\|_p \|b(t)\|_p. \tag{20}$$

Доказательство. Задача (1)–(2) эквивалентна разрешимости операторного уравнения

$$x=P(x),$$

где

$$P[x(t)]=\int_a^b G(t,\ s)\,f\left(s,\ x(s)\right)ds,$$

а $G(t,\ s)$ функция Грина краевой задачи (3)–(4).

Из условий (18) и (19) следует (см. [8]), что оператор P вполне непрерывен и действует в L_p. Используя последовательно условия (18), неравенства Минковского, Гельдера и условие (19) теоремы, получаем

$$\|P[x(t)]\|_p=\left\|\int_a^b G(t,\ s)\,f\left(s,\ x(s)\right)ds\right\|_p \leqslant \left\|\int_b^a G(t,\ s)[A(s)\,|x(s)|+b(s)]\,ds\right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int_a^b G(t,\ s)\,A(s)\,|x(s)|\,ds\right\|_p + \left\|\int_b^b G(t,\ s)\,b(s)\,ds\right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int_a^b G(t,\ s)\,A(s)\,ds\right\|_p \|x(t)\|_p + \left\|\int_a^b G(t,\ s)\,ds\right\|_p \|b(t)\|_p \leqslant S\,\|x\|_p+\gamma, \tag{21}$$

где $\gamma=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n)$, $\gamma_i=k_i\|b_i(t)\|_{p_i}$, $\gamma_0=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\gamma_i\}$.

Обозначим через $|\cdot|_0$ норму в n-мерном пространстве E_n, о которой шла речь в лемме 3. Тогда, положив

$$\|x(t)\|=|\,\|x(t)\|_p\,|_0,$$

пространство L_p превратится в нормированное пространство L_p^0. Из оценки (21) в силу леммы 3

$$\|P[x(t)]\| \leqslant q\,\|x(t)\|+\gamma_0 \qquad (q<1).$$

Из последнего неравенства вытекает, что оператор P преобразует любой шар радиуса $r \geqslant r_0=\frac{\gamma_0}{1-q}$ пространства L_p^0 в себя.

Нетрудно видеть также, что из полной пепрерывности оператора P в пространстве L_p следует его полная непрерывность и в пространстве L_p^0 Применяя теперь теорему 2, заключаем, что задача (1)–(2) имеет в любом шаре радиуса r по крайней мере одно решение.

Оценка (20) непосредственно следует из неравенства (21). Теорема доказана.

Доказанную теорему нетрудно перефразировать на случай пространств L_1 и C. Для этого надо взять функции $b_i(t)$ и $a_{ij}(t)$ из соответствующего пространства, а неравенства (19) заменить следующими:

1) для пространства L_1

$$\left(\operatorname*{vrai\,max}_{a\leqslant s\leqslant a}\int_a^b |G_i(t,\ s)\,a_{ij}(s)|\,dt\right)\leqslant (s_{ij})=S;$$

2) для пространства C

$$\left(\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^b G_i(t,\ s)\,a_{ij}(s)\,ds\right)\leqslant (s_{ij})=S.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3, *причем* $a_{ij}\in C$, $b_i(t)\in C$. *Пусть* $A=\|A(t)\|_C=(\tilde a_{ij})$ — *обобщенная норма матрицы* $A(t)$.

Тогда, если при некотором $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ *выполнены неравенства*

$$1-k_i\tilde a_{ii}>\Big(\sum_{j\neq i}k_i\tilde a_{ij}\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{j\neq i}k_j\tilde a_{ji}\Big)^{1-\alpha}, \tag{22}$$

где числа k_i *определены по формулам* (15), *то существует по крайней мере одно решение* $x^*(t)\in L_p$ *задачи* (1)—(2) *и имеет место оценка* (20).

Доказательство. Из неравенства (19) и условий теоремы вытекает, что в нашем случае матрица S имеет вид

$$S=(k_i\tilde a_{ij})\geqslant\left(\left[\int_a^b\left(\int_a^b |G_i(t,\ s)|^{q_i}\,ds\right)^{p_i/q_i}dt\right]^{1/p_i}\tilde a_{ij}\right).$$

В силу теоремы 3 достаточно показать, что матрица S является a-матрицей.

Из условий (22) и теоремы А. Островского [9] следует, что матрица $I-s$ является K-матрицей, и, следовательно, в силу леммы 1 матрица S является a-матрицей. Теорема доказана.

Заменяя в неравенствах (22) константы k_i на l_i и m_i, определенные формулами (13) и (14) соответственно, получим теоремы, аналогичные теореме 4 в пространствах C и L_1.

В том случае, когда $\alpha_i(t)\geqslant 0$ ($\alpha_i(t)\leqslant 0$) или $\alpha_i(t)\equiv 1$, то в неравенствах (22) константы k_i, l_i и m_i определяются из формул (16) или (17) соответственно.

4. Сформулируем теперь теорему единственности решений задачи (1)—(2) в пространстве L_p.

Теорема 5. *Пусть функции* $f_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 3, *кроме неравенства* (19), *а неравенства* (18) *заменяются следующими*

$$|f_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)-f_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ \bar x_n)|\leqslant\sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\,|x_j-x_j|,$$

$$|f_i(t,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)|\leqslant b_i(t),$$

где $b_i(t) \geqslant 0$, $a_{ij}(t) \geqslant 0$, $b_i(t) \in L_{p_i}$, $a_i(t) \in L_{q_j}$ *и матрица*

$$S=(s_{ij}) \geqslant \left(\left\| \int_a^b G_i(t,\ s)\, a_{ij}(s)\, ds \right\|_{p_i} \right)$$

является α-матрицей.

Тогда задача (1)–(2) *имеет единственное ретение* $x^*(t) \in L_p$, *которое может быть получено методом последовательных приближений, отправляясь от любого элемента* $x^0 \in L_p$ *и имеет место оценка* (20).

Из условий теоремы, проводя несложные вычисления, легко установить, что выполнены все требования теоремы 1. Отсюда и вытекают наши утверждения.

Заметим, что условия единственности при $a_{ij}(t) \in C$ можно формулировать в зависимости от функций $\alpha_i(t)$ и оценок (13)–(17) в форме (22). Условия (22) можно менять, используя различные критерии положительности главных миноров матрицы $I-S$ (см., напр., [3, 9]).

§ 3. Двухточечная краевая задача для системы дифференциальных уравнений с параметром

В этом параграфе доказываются теоремы существования и единственности решений краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\lambda + f(t,\ x,\ \lambda), \tag{23}$$

$$x(a) = x(b) = 0. \tag{24}$$

Здесь $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ постоянные диагональные матрицы, $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ и $\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n)$, а вектор-функция $f(t,\ x,\ \lambda)$ определена при $a \leqslant t \leqslant b$ и $x,\ \lambda \in E$.

Задача (23)–(24) заключается в нахождении такого значения параметра λ, при котором решение $x(t,\ \lambda)$ задачи

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\lambda + f(t,\ x,\ \lambda), \quad x(a) = 0,$$

при $t=b$ обращается в нуль.

1. В заметке [10] для линейной задачи

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\lambda + f(t), \tag{25}$$

$$x(a) = x(b) = 0, \tag{26}$$

была построена функция Грина: пара матриц-функций $\{K(t,\ s),\ G(s)\}$, удовлетворяющих определенным условиям. При этом каждое решение $\{x(t),\ \lambda\}$ задачи (25)–(26) может быть записано в виде

$$x(t) = \int_a^b K(t,\ s) f(s)\, ds, \tag{27}$$

$$\lambda = \int_a^b G(s) f(s)\, ds, \tag{28}$$

где

$$K(t, s)=\begin{cases} e^{-A(s-a)}e^{A(t-a)}\{I+(I-e^{A(t-a)})(e^{Ah}-I)^{-1}\}, & \text{если} \quad s\leqslant t, \\ 0 & , \text{если} \quad s>t, \end{cases} \tag{29}$$

$$G(s)=-B^{-1}(e^{Ah}-I)^{-1}Ae^{A(b-s)}. \tag{30}$$

Допустим, что $A>0$, $B>0$ и вектор-функция $f(t, x, \lambda)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $x, \lambda\in E_n$. Тогда функция Грина $\{K(t, s), G(s)\}$ определяется единственным образом (см. [10]).

Возьмем в качестве основного пространства пространство C. Из формул (27)–(30) получаем

$$x(t)=e^{2A(t-a)}(e^{A(b-t)}-I)(e^{Ah}-I)^{-1}\int_a^t e^{-A(s-a)}f(s)\,ds,$$

$$\lambda=B^{-1}(I-e^{Ah})^{-1}A\int_a^b e^{A(b-s)}f(s)\,ds. \tag{31}$$

Далее

$$\left|\int_a^b K(t, s)\,ds\right|=(e^{Ah}-I)^{-1}e^{2A(t-a)}(e^{A(t-a)}-I)\int_a^t e^{-A(s-a)}ds=$$

$$=A^{-1}(e^{Ah}-I)^{-1}e^{A(t-a)}(e^{A(t-a)}-I)(e^{A(b-t)}-I).$$

Отсюда

$$\left\|\int_a^b K(t, s)\,ds\right\|_C=\frac{1}{4}A^{-1}(e^{Ah}-I).$$

Поэтому

$$\|x(t)\|_C=\left\|\int_a^b K(t, s)f(s)\,ds\right\|_C\leqslant\left\|\int_a^b K(t, s)\,ds\right\|_C\|f(t)\|_C=\frac{1}{4}A^{-1}(e^{Ah}-I)\|f(t)\|_C,$$

где

$$\|x(t)\|_C=\left(\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_1(t)|, \ \dots, \ \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)|\right).$$

Из формулы (31)

$$\left\|\int_a^b G(s)\,ds\right\|=\left\|B^{-1}(I-e^{Ah})^{-1}A\int_a^b e^{A(b-s)}ds\right\|=B^{-1}.$$

Отсюда

$$\|\lambda\|\leqslant B^{-1}\|f(t)\|_C, \quad (\|\lambda\|=(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|)).$$

В пространстве L_1 получаются оценки

$$\|x(t)\|_1\leqslant\frac{h}{4}e^{2Ah}(e^{Ah}-I)^{-1}\|f(t)\|_1,$$

$$\|\lambda\|\leqslant B^{-1}A(e^{Ah}-I)^{-1}e^{Ah}\|f(t)\|_1.$$

2. Рассмотрим теперь нелинейную задачу (23)–(24). Также как и теорема 3 доказывается

Теорема 6. *Пусть $A>0$, $B>0$, а вектор-функция $f(t, x, \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных и ее координаты $f_i(t, x, \lambda)$ удовлетворяют неравенствам*

$$|f_i(t, x, \lambda)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}|x_j|+\sum_{j=n+1}^{2n}\alpha_{ij}|\lambda_{j-n}|+\gamma_i(t) \qquad (i=1, 2, \dots, n), \tag{32}$$

где функции $\gamma(t)=(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))\in C$.

Пусть матрица

$$S=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

где квадратные матрицы n-го порядка $A_k (k=1, 2, 3, 4)$ *имеют вид*

$$A_1=(k_i \alpha_{ij}), \quad A_2=(k_i \alpha_{in+j}), \quad A_3=(k_{n+i} \alpha_{ij}), \quad A_4(k_{n+i} \alpha_{in+j}),$$

$$k_i=\frac{1}{4} a_{ii}^{-1}(e^{a_{ii}h}-1), \quad k_{n+i}=b_{ii}^{-1} \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n),$$

удовлетворяет условиям

$$1-k_\nu \alpha_{i\nu} > \Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{2n} k_\nu \alpha_{i\nu}\Big)^{\alpha} \Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{n} (k_j+k_{n+j})\alpha_{j\nu}\Big)^{1-\alpha}, \quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1), \tag{33}$$

$(i=\nu$, *если* $\nu\leqslant n$; $i=\nu-n$, *если* $\nu>n$; $\nu=1, 2, \ldots, 2n)$.

Тогда задача (23)—(24) *имеет по крайней мере одно решение* $\{x(t), \lambda\}$ *и справедлива оценка*

$$\begin{pmatrix} \|x(t)\|_C \\ \|\lambda\| \end{pmatrix} \leqslant (I-S)^{-1} K \begin{pmatrix} \|\gamma(t)\|_C \\ \|\gamma(t)\|_C \end{pmatrix},$$

где K — *диагональная матрица порядка* $2n$ *с элементами* k_ν.

Если функции $f_i(t, x, \lambda)$ удовлетворяют условиям Каратеодори, неравенству (32) с $\gamma_i(t)\in L_1$ и неравенствам (33) с

$$k_i=\frac{1}{4} e^{2a_{ii}h}(e^{a_{ii}h}-1)^{-1} \quad \text{и} \quad k_{n+i}=a_{ii}b_{ii}^{-1}(e^{a_{ii}h}-1)^{-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

то задача (23)—(24) разрешима в пространстве L_1.

Для однозначной разрешимости этой задачи нетрудно сформулировать теоремы, аналогичные теоремам 5.

§ 4. Краевые задачи для систем дифференциальных уравнений второго порядка

Этот параграф посвящен изучению векторной краевой задачи

$$\ddot{x}-Ax+f(t, \dot{x}, x)=0, \tag{34}$$

$$x(a)=x(b)=0. \tag{35}$$

Здесь $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-мерный вектор, $f(t, x, y)$ вектор-функция, определенная при $a\leqslant t\leqslant b$, $x, y\in E_n$, A — постоянная положительно определенная матрица. В этом случае имеют смысл $A^{1/2}=B$, $\operatorname{sh} A^{1/2}t$ и другие функции от матрицы A [11].

1. Как и в скалярном случае, нетрудно построить для задачи

$$\ddot{x}-Ax+f(t)=0, \quad x(a)=x(b)=0$$

матрицу-функцию Грина; она имеет вид

$$G(t, s)=\begin{cases} B^{-1}\operatorname{sh}^{-1}Bh\operatorname{sh}B(b-t)\operatorname{sh}B(s-a), & \text{если} \quad s\leqslant t, \\ B^{-1}\operatorname{sh}^{-1}Bh\operatorname{sh}B(b-s)\operatorname{sh}B(t-a), & \text{если} \quad s\geqslant t. \end{cases}$$

Тогда

$$G_t'(t, s)=\begin{cases} -\operatorname{sh}^{-1}Bh\operatorname{ch}B(b-t)\operatorname{sh}B(s-a), & \text{если} \quad s<t, \\ \operatorname{sh}^{-1}Bh\operatorname{sh}B(b-s)\operatorname{ch}B(t-a), & \text{если} \quad s>t. \end{cases}$$

Из выражений для функции Грина и ее производной простым подсчетом получаются оценки:

1) в пространстве C:

$$\|x(t)\|_C \leqslant 2A^{-1}\operatorname{sh}^2 B\frac{h}{4}\operatorname{ch}^{-1}B\frac{h}{2}\|f(t)\|_C,$$

$$\|\dot{x}(t)\|_C \leqslant B^{-1}\operatorname{sh}B\frac{h}{2}\operatorname{ch}^{-1}B\frac{h}{2}\|f(t)\|_C;$$

2) в пространстве L_1:

$$\|x(t)\|_1 \leqslant \frac{h}{2}B^{-1}\operatorname{sh}B\frac{h}{2}\operatorname{ch}^{-1}B\frac{h}{2}\|f(t)\|_1,$$

$$\|\dot{x}(t)\|_1 \leqslant h\|f(t)\|_1.$$

Теорема 7. *Пусть функции* $f(t, x, y)=\big(f_1(t, x, y), \ldots, f_n(t, x, y)\big)$ *непрерывны по совокупности переменных* $a\leqslant t\leqslant b$, x, y *и удовлетворяют неравенсту*

$$|f(t, x, y)-f(t, \bar{x}, y)|\leqslant P|x-\bar{x}|+Q|y-\bar{y}|, \tag{36}$$

где $P=(p_{ij})$ *и* $Q=(q_{ij})$ *некоторые неотрицательные матрицы n-го порядка.*

Пусть матрица

$$S=\begin{pmatrix} 2A^{-1}\operatorname{sh}^2 B\frac{h}{4}\operatorname{ch}^{-1}B\frac{h}{2}P & 2A^{-1}\operatorname{sh}^2 B\frac{h}{4}\operatorname{ch}^{-1}B\frac{h}{2}Q \\ B^{-1}\operatorname{sh}B\frac{h}{2}\operatorname{ch}^{-1}B\frac{h}{2}P & B^{-1}\operatorname{sh}B\frac{h}{2}\operatorname{ch}^{-1}B\frac{h}{2}Q \end{pmatrix}$$

является а-матрицей.

Тогда задача (34)—(35) *имеет единственное решение* $x^*(t)\in C$, *которое можно получить методом последовательных приближений, отправляясь от любого элементи* $x^0(t)\in C$. *При этом имеет место оценка*

$$\begin{pmatrix}\|x(t)\|_C\\ \|\dot{x}(t)\|_C\end{pmatrix}\leqslant (I-S)^{-1}\begin{pmatrix}\|f(t, 0, 0)\|_C\\ \|f(t, 0, 0)\|_C\end{pmatrix}.$$

Для однозначной разрешимости задачи (34)—(35) в пространстве L_1 достаточно потребовать, что вектор-функция $f(t, x, y)$ удовлетворяла условиям Каратеодори и неравенствам (36), а матрица $S=(s_{ij})$ имела вид

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{2}B^{-1}\operatorname{sh}B\frac{h}{2}\operatorname{ch}^{-1}B\frac{h}{2}P & \frac{h}{2}B^{-1}\operatorname{sh}B\frac{h}{2}\operatorname{ch}^{-1}B\frac{h}{2}Q \\ hP & hQ \end{pmatrix}.$$

§ 5. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка

В этом параграфе рассматривается краевая задача

$$x^{(IV)}=f(t, x, x, \ddot{x}, \dddot{x}), \tag{37}$$

$$x(a)=\dot{x}(a)=\ddot{x}(b)=\dddot{x}(b)=0. \tag{38}$$

Краевые условия (38) в случае поперечных колебаний стержня означают, что один его конец при $t=a$ закреплен жестко, а второй при $t=b$ свободен.

1. Для линейной задачи

$$x^{(IV)}=f(t),$$

$$x(a)=\dot{x}(a)=\ddot{x}(b)=\dddot{x}(b)=0,$$

как известно [12], решение может быть записано в виде

$$x(t)=\int_a^b G(t,\ s)f(s)\,ds, \tag{39}$$

где

$$G(t,\ s)=\begin{cases}\frac{1}{6}(-s^3+3ts^2-6ast+3a^2t+3a^2s-2a^3), & \text{при}\quad s\leqslant t,\\ \frac{1}{6}(-t^3+3t^2s-6ast+3a^2s+3a^2t-2a^3), & \text{при}\quad s\geqslant t,\end{cases} \tag{40}$$

функция Грина. Тогда

$$x^{(k)}(t)=\int_a^b G_t^{(k)}(t,\ s)f(s)\,ds, \qquad (k=1,\ 2,\ 3), \tag{41}$$

где

$$G'_t(t,\ s)=\begin{cases}\frac{(s-a)^2}{2}, & \text{при}\quad s\leqslant t,\\ \frac{(s-a)^2-(t-s)^2}{2}, & \text{при}\quad s\geqslant t,\end{cases}$$

$$G''_t(t,\ s)=\begin{cases}0, & \text{при}\quad s\leqslant t,\\ s-t, & \text{при}\quad s\geqslant t,\end{cases}$$

$$G'''_t(t,\ s)=\begin{cases}0, & \text{при}\quad s<t,\\ -1, & \text{при}\quad s>t.\end{cases}$$

Возьмем в качестве основного пространства пространство C непрерывных на отрезке $[a,\ b]$ функций. Тогда из формул (39) и (41) получаем

$$\|x(t)\|_C\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^b G(t,\ s)\,ds\right|\|f(t)\|_C, \tag{42}$$

$$\|x^{(k)}(t)\|_C\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^b G_t^{(k)}(t,\ s)\,ds\right|\|f(t)\|_C, \qquad (k=1,\ 2,\ 3). \tag{43}$$

В силу выражения (40) для функции Грина $G(t,\ s)$ имеем

$$\left|\int_a^b G(t,\ s)\,ds\right|=\frac{1}{6}\left|\int_a^t(-s^3+3ts^2-6ast+3a^2t+3a^2s-2a^3)\,ds+\right.$$

$$\left.+\int_t^b(-t^3+3t^2s-6ast+3a^2s+3a^2t-2a^3)\,ds\right|=$$

$$=\frac{1}{24}\,|\,t^4-4t^3b+6b^2t^2+4t(3a^2b-3ab^2-a^3)+3a^4+6a^2b^2-8a^3b\,|.$$

Отсюда

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^b G(t,\ s)\,ds\right|=\frac{h^4}{8}.$$

Для производных функции Грина $G_t^{(k)}(t,\ s)$, $(k=1,\ 2,\ 3)$ получаются оценки

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^b G_t^{(k)}(t,\ s)\,ds\right|=\frac{h^{4-k}}{(4-k)!}, \qquad (k=1,\ 2,\ 3).$$

Из двух последних формул и неравенств (42)—(43) следует

$$\| x(t) \|_C \leqslant \frac{h^4}{8} \| f(t) \|_C,$$

$$\| x^{(k)}(t) \|_C \leqslant \frac{h^{4-k}}{(4-k)!} \| f(t) \|_C, \qquad (k=1,\ 2,\ 3).$$

Если в качестве основного пространства взять пространство L_2 функций, суммируемых с квадратом на отрезке $[a,\ b]$, то

$$\| x(t) \|_2 \leqslant \left(\int_a^b \int_a^b G^2(t,\ s)\, ds\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \| f(t) \|_2.$$

После несложных, но трудоемких вычислений, получаются оценки

$$\| x(t) \|_2 \leqslant \sqrt{\frac{11}{840}}\, h^4 \| f(t) \|_2, \qquad \left(l_1 = \sqrt{\frac{11}{840}} \right),$$

$$\| \dot{x}(t) \|_2 \leqslant \sqrt{\frac{11}{360}}\, h^3 \| f(t) \|_2, \qquad \left(l_2 = \sqrt{\frac{11}{360}} \right),$$

$$\| \ddot{x}(t) \|_2 \leqslant \frac{h^2}{\sqrt{6}} \| f(t) \|_2, \qquad \left(l_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \right),$$

$$\| \dddot{x}(t) \|_2 \leqslant \frac{h}{\sqrt{2}} \| f(t) \|_2, \qquad \left(l_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

2. Приведем теперь теоремы существования и единственности решений задачи (37)—(38) в пространствах C и L_2.

Теорема 8. *Пусть функция $f(t,\ x,\ y,\ z,\ u)$ непрерывна по совокупности переменных $a \leqslant t \leqslant b$, x, y, z, u и удовлетворяет неравенству*

$$| f(t,\ x,\ y,\ z,\ u) | \leqslant \alpha | x | + \beta | y | + \gamma | z | + \delta | u | + \eta | t |, \tag{44}$$

где постоянные α, β, γ, δ связаны соотношением

$$q = 24 - 3\alpha h^4 - 4\beta h^3 - 12\gamma h^2 - 24\delta h > 0, \tag{45}$$

а $\eta(t)$ некоторая неотрицательная непрерывная функция.

Тогда задача (37)—(38) имеет по крайней мере одно решение, для которого справедливы оценки

$$\| x^*(t) \|_C \leqslant \frac{3h^3}{q} \| \eta(t) \|_C,$$

$$\| \dot{x}^*(t) \|_C \leqslant \frac{4h^2}{q} \| \eta(t) \|_C,$$

$$\| \ddot{x}^*(t) \|_C \leqslant \frac{12h}{q} \| \eta(t) \|_C,$$

$$\| \dddot{x}^*(t) \|_C \leqslant \frac{24}{q} \| \eta(t) \|_C.$$

Теорема 9. *Пусть функция $f(t,\ x,\ y,\ z,\ u)$ удовлетворяет условиям теоремы 8, причем неравенство (44) заменено следующим*

$$| f(t,\ x,\ y,\ z,\ u) - f(t,\ \bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},\ \bar{u}) \leqslant \alpha | x - \bar{x} | + \beta | y - \bar{y} | + \gamma | z - \bar{z} | + \delta | u - \bar{u} |.$$

Тогда задача (37)—(38) имеет единственное решение и справедливы оценки предыдущей теоремы с

$$\eta(t) = | f(t,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) |.$$

Если функция $f(t, x, y, z, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $\eta(t) \in L_2$, а неравенство (45) выполнено в форме

$$p = 1 - \alpha l_1 - \beta l_2 - \gamma l_3 - \delta l_4 > 0,$$

то существует по крайней мере одно решение $x^*(t) \in L_2$ и имеют место оценки

$$\| x^*(t) \|_2 \leqslant \frac{l_1 h^3}{p} \| \eta(t) \|_2,$$

$$\| \dot{x}^*(t) \|_2 \leqslant \frac{l_2 h^2}{p} \| \eta(t) \|_2,$$

$$\| \ddot{x}^*(t) \|_2 \leqslant \frac{l_3 h}{p} \| \eta(t) \|_2,$$

$$\| \dddot{x}^*(t) \|_2 \leqslant \frac{l_4}{p} \| \eta(t) \|_2.$$

В заключение авторы благодарят С. Г. Крейна за внимание к настоящей статье.

Воронежский Государственный университет

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
25.VI.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Перов, Об одном общем методе исследования краевых задач, Известия АН СССР (печатается).
2. А. И. Перов, О задаче Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Укр. матем. журнал (1964).
3. M. Fiedler and V. Pták, On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors, Чехосл. матем. журнал, т. 12 (87), 382–400 (1962).
4. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, Москва, 1959.
5. J. D. Tamarkin, The notion of the Greens function in the theory integro-differential, equations, Transaction of the Americ. Math. Soc., vol. 29, 755–800 (1927).
6. M. Pagni, Equazione differenziali lineari e problemi al contorno con condizioni integrali, Rend. Seminario Mat. Univ. Padova, parte I, 24, 245–264 (1955).
7. Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, Москва, 1958.
8. М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных уравнений, Гостехиздат, Москва, 1956.
9. М. Пароди, Локализация характеристических чисел матриц и ее применения, ИЛ, Москва, 1960.
10. А. В. Кібенко, Функція Гріна крайової задачі для звичайного диференціального рівняння першого порядку з параметром, ДАН УРСР, 3, 309–314 (1963).
11. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, Москва, 1953.
12. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, Москва, 1961.

APIE KAI KURIUOS KRAŠTINIUS UŽDAVINIUS

B. V. KVEDARAS, A. V. KIBENKO ir A. I. PEROVAS

(*Reziumė*)

Straipsnyje apibrėžiamos apibendrintos tiesinės normuotos erdvės ir jose formuluojami Šauderio ir suspaudimų principai. Remiantis šiais principais, įrodoma sprendinių egzistavimas ir vienetinumas: pirmos eilės netiesinių diferencialinių lygčių sistemai su integralinėmis sąlygomis; kraštiniam uždaviniui pirmos eilės diferencialinių lygčių sistemai, priklausančiai nuo parametro; antros eilės diferencialinių lygčių sistemos kraštiniam uždaviniui ir vienam kraštiniam uždaviniui ketvirtos eilės diferencialiniai lygčiai.

ON SOME BOUDARY PROBLEMS

B. V. KVEDARAS, A. V. KIBENKO and A. I. PEROV

(*Summary*)

In this paper a definition of the generalized linear normed space is given and the Schauders principle and the principle of contraction mapping are formulated in this space. The teorems of existence and unity for solutions of nonlinear sistems of differential equations with the integral condition, for solutions of the two-points boundary problem for the sistems of first order differential equation with a parameter, for the two points boundary problem for the sistems of second order differential equation and for the solution of boundary problem for one fourth order differential equation are prouved by means of the mentined principles.