V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Я. Х. КУЧКАРОВ

Введение

Рассматривается последовательность серий

$$X_1^{(n)},\ X_2^{(n)},\ \ldots,\ X_n^{(n)}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{0.1}$$

случайных величин, связанных в каждой n-ой серии в неоднородную цепь Маркова с n моментами времени, с пространствами состояний $\Omega_k^{(n)}$, с переходными вероятностями $P_k^{(n)}(\omega,\ A)$ из состояния $\omega\in\Omega_{k-1}^{(n)}$ в любое множество A, принадлежащее σ-алгебре $F_k^{(n)}$ подмножеств множества $\Omega_k^{(n)}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и начальным распределением вероятностей $P^{(n)}(A)$, $A\in F_1^{(n)}$.

Пусть коэффициент эргодичности цепи

$$\alpha_n = 1-\max_{2\leqslant k\leqslant n}\ \sup_{\substack{\omega,\ \tilde\omega\in\Omega_{k-1}^{(n)}\\ A\in F_k^{(n)}}} |P_k^{(n)}(\omega,\ A)-P_k^{(n)}(\tilde\omega,\ A)|.$$

Положим

$$S_{kl}^{(n)}=X_{k+1}^{(n)}+X_{k+2}^{(n)}+\ldots+X_l^{(n)},$$

$$S_n=S_{0n}^{(n)},\quad B_n^2=DS_n,\quad \chi(t)=\sqrt{2t\ln\ln t},$$

$$S_n^*=\max\{S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n\},\quad \varphi(z,\ S_n)=Ml^{zS_n},$$

$$q(x)=P\{S_n>x\}.$$

В работах Т. А. Сарымсакова [1] и У. Кадырова [2] доказан закон повторного логарифма для неоднородных цепей Маркова при условии $\alpha_n\geqslant\alpha>0$ для равномерно ограниченных величин $X_k^{(n)}$.

В настоящей заметке закон повторного логарифма доказан при более слабых ограничениях, накладываемых на нижнюю грань вероятностей перехода.

Сформулируем основные теоремы:

Теорема 1. Пусть при всех k и n и при некоторых постоянных c и C

$$0<c\leqslant DX_k^{(n)}\leqslant C<\infty$$

и пусть

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k^{(n)}|=0\left(\alpha_n^3 n(\ln\ln n)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

тогда к последовательности сумм S_n, составленных из случайных величин (0.1), применим закон повторного логарифма, т. е.

$$P\left\{\limsup\frac{S_n}{\chi(B_n^2)}=1\right\}=1.$$

Другими словами, при каждом $\delta>0$ последовательность $(1+\delta)\chi(B_n^2)$ принадлежит верхнему классу, а последовательность $(1-\delta)\chi(B_n^2)$ — нижнему классу для последовательности S_n.

Так как предположения остаются в силе, если каждое $X_k^{(n)}$ заменять на $-X_k^{(n)}$, то и утверждение справедливо. Мы получаем

$$P\left\{\liminf \frac{S_n}{\chi(B_n^2)} = -1\right\} = 1$$

и, следовательно, утверждение верно для обеих последовательностей: S_n и $|S_n|$, если оно верно для первой.

Теорема 2. Пусть при всех k и n

$$DX_k^{(n)} \geqslant c > 0 \tag{0.2}$$

и пусть

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} |X_k^{(n)}| = 0\left(\alpha_n B_n (\ln\ln B_n^2)^{-\frac{1}{2}}\right), \tag{0.3}$$

тогда к последовательности сумм S_n, составленных из случайных величин (0.1), применим закон повторного логарифма.

Интересно также несколько ослабить условие (0.2), заменив его предположением о несбращении в нуль достаточного числа дисперсий $DX_k^{(n)}$.

Теорема 3. Пусть при $n\to\infty$

$$\alpha_n^3 \sum_{k=1}^{n} DX_k^{(n)} \left(\ln\ln \sum_{k=1}^{n} DX_k^{(n)}\right)^{-1} \to \infty$$

и пусть

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} |X_k^{(n)}| = 0\left(\alpha_n^3 \sum_{k=1}^{n} DX_k^{(n)} \left(\ln\ln \sum_{k=1}^{n} DX_k^{(n)}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}};$$

тогда к последовательности сумм S_n, составленных из случайных величин (0.1), применим закон повторного логарифма.

Теорема 4. Пусть выполнено условие (0.3) и пусть при $n\to\infty$

$$\alpha_n B_n (\ln\ln B_n^2)^{-\frac{1}{2}} \to \infty, \tag{0.4}$$

тогда к последовательности сумм S_n, составленных из случайных величин (0.1), применим закон повторного логарифма.

Доказательства сформулированных выше теорем мы проводим, следуя в основном методу А. Н. Колмогорова [3] и используя результаты, полученные Р. Л. Добрушиным [4] и В. А. Статулявичюсом [5].

§ 1. Вспомогательные предложения

Не ограничивая общности, мы в дальнейшем предположим, что $MX_k^{(n)} = 0$, при всех k и n, тогда $MS_n = 0$ при всех n.

Лемма 1*). Если

$$P\{\sup_{1\leqslant k\leqslant n} |X_k^{(n)}| \leqslant C_n\} = 1,$$

то для k-ого семиинварианта Γ_{kn} сумм S_n, составленных из случайных величин (0.1), справедлива оценка:

$$|\Gamma_{nk}| \leqslant k!\, H^k B_n^2 (\alpha_n^{-1} C_n)^{k-2},$$

где H — положительная константа, $k \geqslant 2$.

*) См. [5], стр. 116, лемма 1.

Из этой леммы следует, что функция $\ln \varphi(z, S_n)$ аналитична в круге $|z| \leqslant \frac{\eta\alpha_n}{HC_n}$, где $\eta < 1$. Отсюда легко получаем, что

$$Ml^{zS_n} = \exp\left\{\frac{z^2 B_n^2}{2}\left(1 + \frac{2H^2 C_n}{(1-\eta)\,\alpha_n}\cdot\Theta z\right)\right\} \tag{1.1}$$

при

$$|z| \leqslant \frac{\eta\alpha_n}{HC_n}, \text{ где } |\Theta| \leqslant 1.$$

Далее, используя (1.1), без труда можно получить следующие показательные оценки:

I. Если $x \leqslant \frac{\eta\alpha_n B_n^2}{HC_n}$, то

$$q(x) < \exp\left\{-\frac{x^2}{2B_n^2}\left(1 - \frac{2H^2 C_n}{(1-\eta)\,\alpha_n B_n^2}\cdot x\right)\right\}. \tag{1.2}$$

II. Для любого $\gamma > 0$ можно указать $\frac{HC_n}{\eta\alpha_n B_n^2}\cdot x = \rho(\gamma)$ столь малое и $\frac{x^2}{B_n^2} = \lambda(\gamma)$ столь большое, что

$$q(x) > \exp\left\{-\frac{x^2}{2B_n^2}(1+\gamma)\right\}. \tag{1.3}$$

Лемма 2*). Пусть случайные величины последовательности (0.1) удовлетворяют условию

$$\sup_{\omega_k \in \Omega_k^{(n)}} M\{(S_{kn}^{(n)})^2/\omega_k\} < KB_n^2, \tag{1.4}$$

где $M(\xi\,|\,\omega)$ означает условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно ω и K — положительная константа. Тогда

$$P\{S_n^* > x\} < 2P\{S_n > x - \sqrt{2KB_n^2}\}. \tag{1.5}$$

каково бы ни было x.

Замечание. Очень легко проверить, что условие (1.4) всегда выполняется, если выполнены условия теоремы 4.

Лемма 3. Если выполнены условия теоремы 4, то существует такая целочисленная функция $g(n) > 0$ и такое разбиение

$$0 = l_0^{(n)} < \nu_1^{(n)} < l_1^{(n)} < \nu_2^{(n)} < \ldots < l_{g(n)}^{(n)} < \nu_{g(n)+1}^{(n)} = n \tag{1.6}$$

с

$$l_i^{(n)} - \nu_i^{(n)} = \left[\frac{\ln\ln B_n^2}{\alpha_n}\right], \qquad i = 0, 1, \ldots, g(n),$$

что при $n \to \infty$ $g(n) \to \infty$,

$$B_n^{-2} D\left(\sum_{i=1}^{g(n)} S_{\nu_i^{(n)}\, l_i^{(n)}}^{(n)}\right) \to 0, \tag{1.7}$$

$$B_n^{-2} D\left(S_{l_i^{(n)}\,\nu_{i+1}^{(n)}}^{(n)}\right) \leqslant \frac{2}{g(n)}, \tag{1.8}$$

$$B_n^{-2} D\left(S_{l_i^{(n)}\, n}^{(n)}\right) = 1 - \frac{i}{g(n)} + O\left(\frac{1}{g(n)}\right), \tag{1.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{-2} \sum_{i=0}^{g(n)} D\left(S_{l_i^{(n)}\,\nu_{i+1}^{(n)}}^{(n)}\right) = 1. \tag{1.10}$$

Эти утверждения доказываются аналогично как и в [4, стр. 389—391].

*) См. [6], стр. 160—179, лемма 2.

§ 2. Доказательство теорем 1–4

Сперва докажем теорему 4. Вначале мы докажем, что последовательность $(1+\delta)\chi(B_n^2)$ принадлежит верхнему классу для последовательности S_n. Из (1.7), (1.8) и (1.10) вытекает, что при каждом β существует последовательность $g(n_k)=g\left(n_k(\beta)\right)\to\infty$ при $k\to\infty$, $g(n_k)<g(n_{k+1})<\ldots$, такая, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{g(n_k)} D\left(S^{(n)}_{l_i^{(n)}, l_{i+1}^{(n)}}\right)}{\beta^{2k}}=1. \tag{2.1}$$

Пусть теперь δ, δ_1, δ_2 – положительные числа.

Имеем:

$$P\{S_n>(1+\delta)\chi(B_n^2) \text{ бесконечное число раз}\}\leqslant$$
$$\leqslant P\{S^*_{n_k}>(1+\delta)\chi(B^2_{n_{k-1}}) \text{ бесконечное число раз}\},$$

где $S^*_{n_k}=\max\limits_{n\leqslant n_k} S_n$. В силу (2.1), учитывая (1.10), выводим

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\chi(B^2_{n_{k-1}})}{\chi(B^2_{n_k})}=\frac{1}{\beta}. \tag{2.2}$$

Следовательно, беря $\delta_1<\delta$, мы можем подобрать $\beta>1$ так, что $\frac{1+\delta}{\beta}>$ $>1+\delta_1$, и

$$P\{S^*_{n_k}>(1+\delta)\chi(B^2_{n_{k-1}}) \text{ бесконечное число раз}\}\leqslant$$
$$\leqslant P\{S^*_{n_k}>(1+\delta_1)\chi(B^2_{n_k}) \text{ бесконечное число раз}\}.$$

Далее имеем

$$P\{S^*_{n_k}>(1+\delta)\chi(B^2_{n_k}) \text{ бесконечное число раз}\}\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{k\to\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}P\{S^*_{n_j}>(1+\delta_1)\chi(B^2_{n_k})\}.$$

Наше утверждение будет доказано, если мы докажем, что

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}P\{S^*_{n_j}>(1+\delta_1)\chi(B^2_{n_k})\}=0.$$

Но, на основании леммы 2 общий член этого ряда ограничен величиной

$$2P\left\{S_{n_j}>\left(1+\delta_1\sqrt{\frac{K}{\ln\ln B^2_{n_j}}}\right)\chi(B^2_{n_j})\right\},$$

где $\lim\limits_{j\to\infty}\left(1+\delta_1-\sqrt{\frac{K}{\ln\ln B^2_{n_j}}}\right)=1+\delta_1$. Поэтому при $\delta_2<\delta_1$, и достаточно больших j

$$P\left\{S_{n_j}>\left(1+\delta_1-\sqrt{\frac{K}{\ln\ln B^2_{n_j}}}\right)\chi(B^2_{n_j})\right\}\leqslant P\{S_{n_j}>(1+\delta_2)\chi(B^2_{n_j})\}.$$

Применяя теперь неравенство (1.2) при достаточно больших j, получим

$$P\{S_{n_j}>(1+\delta_2)\chi(B^2_{n_j})\}<\frac{C_1}{j^{1+\delta_2}},$$

где

$$C_1=\frac{1}{\left(2\ln\beta+\frac{1}{j_0}\ln\frac{1}{2}\right)^{1+\delta_2}} \text{ и } j_0<j, \qquad (j_0 \text{ – фиксир.})$$

и утверждение доказано. Далее, в соответствии с замечанием, сделанным после формулировки теоремы,

$$P\{|S_n| > (1+\delta)\chi(B_n^2) \text{ бесконечное число раз}\} = 0.$$

Остается доказать, что последовательность $(1-\delta)\chi(B_n^2)$ принадлежит нижнему классу для последовательности S_n. Это утверждение будет заведомо справедливым, если докажем его справедливость для последовательности S_{n_k}, таким образом, достаточно доказать, что $U_k \to 1$ при $k \to \infty$, где

$$U_k = P\left\{\max_{1 \leqslant j \leqslant k}\left(|S_{n_j}| - (1-\delta)\chi(B_{n_j}^2)\right) > 0\right\}.$$

Для любого $m = 1, 2, \ldots$ имеем

$$U_m = \sum_{k=1}^{m} u_k.$$

где u_k есть вероятность совместного осуществления событий

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant k-1}\left(|S_{n_j}| - (1-\delta)\chi(B_{n_j}^2)\right) \leqslant 0, \qquad (2.3)$$
$$|S_{n_k}| > (1-\delta)\chi(B_{n_k}^2).$$

Если k выбрано достаточно большим, то из события $E_k \cap \tilde{E}_k$, где

$$E_k = \left\{\max_{1 \leqslant j \leqslant k-1}\left(|S_{n_j}| - (1-\delta)\chi(B_{n_j}^2)\right) \leqslant 0\right\},$$
$$\tilde{E}_k = \left\{S^{(n)}_{n'_k n_k} > \left(1 - \frac{\delta}{4}\right)\chi(DS^{(n)}_{n'_k n_k})\right\}, \qquad (2.4)$$

где $n'_k > n_{k-1}$, следуют события (2.3). Предположим, что (2.4) выполнено. Тогда

$$S_{n_k} \geqslant S^{(n)}_{n'_k n_k} - \max_{1 \leqslant j \leqslant k-1}|S_{n_{j-1}}| - |S^{(n)}_{n_{k-1} n'_k}| > \left\{\left(1 - \frac{\delta}{4}\right)\frac{\chi(DS^{(n)}_{n'_k n_k})}{\chi(B_n^2)} - \right.$$
$$\left. - (1-\delta)\frac{\chi(B^2_{n_{k-1}})}{\chi(B^2_{n_k})} - \frac{(\max_j |X_j^{(n)}|)(n'_k - n_{k-1})}{\chi(B^2_{n_k})}\right\}\chi(B^2_{n_k}).$$

Используя (2.2), можно подобрать $\beta > 1$ так, что

$$\frac{\chi(B^2_{n_{k-1}})}{\chi(B^2_{n_k})} < \frac{\delta}{4} \qquad \text{при } k \geqslant k_0.$$

Из (1.9) следует, что

$$\frac{\chi(DS^{(n)}_{n'_k n_k})}{\chi(B^2_{n_k})} \geqslant \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) \qquad \text{при } k \geqslant k_0.$$

Для наших целей достаточно $n'_k - n_{k-1}$ определить равенством $n'_k - n_{k-1} = \left[\frac{\ln\ln B^2_{n_k}}{\alpha_n}\right]$, тогда из (0.3) следует, что

$$\frac{(\max_j |X_j^{(n)}|)\ln\ln B^2_{n_k}}{\alpha_n \chi(B^2_{n_k})} < \frac{\delta}{16} \qquad \text{при } k \geqslant k_0.$$

Следовательно,

$$S_{n_k} > (1-\delta)\chi(B^2_{n_k}).$$

Согласно доказанному, для больших значений k имеем

$$u_k \geqslant P\{E_k \cap \tilde{E}_k\} \geqslant P\{E_k\}\left\{P\{\tilde{E}_k\} - \left| P\{\tilde{E}_k | E_k\} - P\{\tilde{E}_k\}\right|\right\},$$

где $P\{A|F\}$ условная вероятность события A относительно F.

Из (1.3), (1.10) и (2.1), без труда выводим, что

$$P\left\{S^{(n)}_{n'_k n_k} > \left(1 - \frac{\delta}{4}\right)\chi(DS^{(n)}_{n'_k n_k})\right\} > \frac{C_2}{k^{1-\frac{\delta}{4}}},$$

где C_2 — положительная константа. Используя соотношение Р. Л. Добрушина (см. [4], стр. 385, (5.2)) и учитывая (1.10) и (2.1) получаем

$$\left| P\{\tilde{E}_k | E_k\} - P\{\tilde{E}_k\}\right| \leqslant l^{-\alpha_n(n'_k - n_{k-1})} \leqslant l^{-\ln\ln B^2_{n_k}} < \frac{C_3}{k},$$

где C_3 — положительная константа.

Следовательно,

$$u_k \geqslant P\{E_k\}\cdot\frac{C_4}{k^{1-\frac{\delta}{4}}}, \tag{2.5}$$

где C_4 — положительная константа. Очевидно вероятность $P\{E_k\}$ с увеличением k может только убывать. Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} P\{E_k\} = 0$, допустим противное; тогда при некотором $\alpha > 0$

$$P\{E_k\} \geqslant \alpha,$$

вследствие (2.5)

$$U_m = \sum_{k=1}^{m} u_k \geqslant \alpha \sum_{k=1}^{m} \frac{C_4}{k^{1-\frac{\delta}{4}}},$$

что невозможно, так как правая часть становится сколь угодно большой при больших m. Итак,

$$\lim_{k\to\infty} P\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant k}\left(|S_{n_j}| - (1-\delta)\chi(B^2_{n_j})\right) \leqslant 0\right\},$$

что и требовалось доказать. Доказательство теоремы 4 закончено.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2. Из условия (0.2) следует, что $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|X^{(n)}_k| \geqslant c^{\frac{1}{2}}$. Поэтому из (0.3) вытекает, что $\alpha_n^{-1} B_n^{-1} (\ln\ln B_n^2)^{\frac{1}{2}} \to 0$.

а отсюда следует, что $\alpha_n B_n (\ln\ln B_n^2)^{-\frac{1}{2}} \to \infty$, и, таким образом, условия теоремы 2 уже условий теоремы 4.

Мы выведем теорему 3 из теоремы 4. Действительно, если учесть оценку $B_n^2 \geqslant \frac{\alpha_n}{100}\sum\limits_{k=1}^{n} DX^{(n)}_k$ (см. [4], стр. 422), то

$$\alpha_n^3 \sum_{k=1}^{n} DX^{(n)}_k \left(\ln\ln \sum_{k=1}^{n} DX^{(n)}_k\right)^{-1} \leqslant \left(10C_5\,\alpha_n B_n (\ln\ln B_n^2)^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \to \infty$$

при $n\to\infty$, где C_5 — положительная константа, значит

$$\alpha_n B_n (\ln\ln B_n^2)^{-\frac{1}{2}} \to \infty,$$

кроме этого

$$\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k^{(n)}|\right)\left(\alpha_n B_n(\ln\ln B_n^2)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k^{(n)}|\right)\left(\alpha_n^3\sum_{k=1}^{n}DX_k^{(n)}\left(\ln\ln\sum_{k=1}^{n}DX_k^{(n)}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\to 0$$

при $n\to\infty$, таким образом условия теоремы 3 свелись к условиям теоремы 4.

Теорема 1 является следствием теоремы 4. Из нашей теоремы 1 при $\alpha_n=1$ следует теорема А. Н. Колмогорова [3], при $\alpha_n=\alpha$ результаты Н. А. Сапогова [6, теоремы 1—4], а при $\alpha_n\geqslant\alpha$ Т. А. Сарымсакова [1, теорема 4] и У. Кадырова [2, теорема 4].

В заключение считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность Витаутасу Антоновичу Статулявичюсу за постоянную помощь при выполнении настоящей работы. Автор глубоко признателен также А. К. Алешкявичене за внимание и ценные советы.

Ташкентский политехнический
институт

Поступило в редакцию
25.II.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. А. Сарымсаков, Неоднородные цепи Маркова, Теор. вероятн. и ее прим., 4, 2, 194—201 (1961).
2. У. Кадыров, К теории неоднородных цепей Маркова, Изв. АН Уз. ССР, серия физико-мат., № 1, 1961.
3. А. Н. Колмогоров, Über das Gesetz des iterierten Logaritmus, Math. Annalen, 101, стр. 126 (1929).
4. Р. Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, Теор. вероятн. и ее прим., I; 1,4, 72—88, 365—425, (1956).
5. В. А. Статулявичюс, Об уточнениях предельных теорем для слабо зависимых случайных величин, Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятн. и мат. статистике, Вильнюс, стр. 113—119, (1962).
6. Н. А. Сапогов, Закон повторного логарифма для сумм зависимых величин, Ученые записи ЛГУ, сер. матем., вып., 19 (1950).

KARTOTINIO LOGARITMO DĖSNIS NEHOMOGENINĖMS MARKOVO GRANDINĖMS

J. KUČKAROVAS

(Reziumė)

Sakysime, kiekvienam fiksuotam n atsitiktiniai dydžiai $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ yra surišti į Markovo grandinę su būsenų aibėmis $\Omega_k^{(n)}$, aibių $\Omega_k^{(n)}$ išmatuojamų poaibių σ-algebromis $F_k^{(n)}$, perėjimo tikimybėmis $P_k^{(n)}(\omega, A)$ iš $\omega\in\Omega_{k-1}^{(n)}$ būsenos $k-1$-me žingsnyje į būsenų aibę $A\in F_k^{(n)}$ k-me žingsnyje, $k=2, 3, \ldots, n$, pradiniu tikimybių pasiskirstymu $P_1^{(n)}(A)$, $A\in F_1^{(n)}$ ir ergodiškumo koeficientu

$$\alpha_n=1-\max_{2\leqslant k\leqslant n}\sup_{\omega,\,\tilde\omega,\,A}|P_k^{(n)}(\omega, A)-P_k^{(n)}(\tilde\omega), A)|.$$

Pažymėkime

$$S_n=X_1^{(n)}+X_2^{(n)}+\ldots+X_n^{(n)},\quad B_n^2+DS_n.$$

Suformuluosime pagrindinius rezultatus:

1 teorema. Sakysime,

$$0<c\leqslant DX_k^{(n)}\leqslant C<\infty,$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k^{(n)}|=0\left(\alpha_n^3 n(\ln\ln n)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

tada kartotinio logaritmo dėsnis galioja.

2 teorema. Tarkime, kad

$$DX_k^{(n)}\geqslant c>0,$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k^{(n)}|=0\left(\alpha_n B_n(\ln\ln B_n^2)^{-\frac{1}{2}}\right), \tag{1}$$

tada kartotinio logaritmo dėsnis galioja.

3 teorema. Tarkime, kad

$$\alpha_n^3\sum_{k=1}^{n}DX_k^{(n)}\left(\ln\ln\sum_{k=1}^{n}DX_k^{(n)}\right)^{-1}\to\infty,\quad n\to\infty,$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k^{(n)}|=0\left(\alpha_n^3\sum_{k=1}^{n}DX_k^{(n)}\left(\ln\ln\sum_{k=1}^{n}DX_k^{(n)}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

tada kartotinio logaritmo dėsnis galioja.

4 teorema. Sakysime, patenkinta (1) ir

$$\alpha_n B_n(\ln\ln B_n^2)^{-\frac{1}{2}}\to\infty\quad(n\to\infty),$$

tada kartotinio logaritmo dėsnis galioja.

THE LAW OF THE ITERATED LOGARITHM FOR NON-STATIONARY MARKOV CHAINS

J. KUCHKAROV

(*Summary*)

In this paper we consider a sequence of series of random variables $X_1^{(n)},\ldots,X_n^{(n)}$, which in each of the n-th series are connected into a Markov's chain with sets of states $\Omega_k^{(n)}$, with σ-algebraes $F_k^{(n)}$ of measurable subsets of these sets, with transitional probabilities $P_k^{(n)}(\omega, A)$ from a state $\omega\in\Omega_{k-1}^{(n)}$ in the time moment $k-1$ into a set $A\in F_k^{(n)}$ in the time moment k, $k=2, 3, \ldots, n$, with initial probability distribution $P_1^{(n)}(A)$, $A\in F_1^{(n)}$ and with a ergodic coefficient

$$\alpha_n=1-\max_{2\leqslant k\leqslant n}\sup_{\omega,\tilde{\omega},A}|P_k^{(n)}(\omega, A)-P_k^{(n)}(\tilde{\omega}, A)|.$$

Let $X_k^{(n)}$ take only integer values and $X_k^{(n)}$ borended be uniform in respect to n and $k\leqslant n$, and $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k^{(n)}$.

Theorem 1: If

1) $0<c\leqslant DX_k^{(n)}\leqslant c<\infty$,

2) $\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k^{(n)}|=0\left(\alpha_n^3 n(\ln\ln n)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

then we have

3) $P\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\dfrac{|S_n|}{\sqrt{2DS_n\ln\ln DS_n}}=1\right\}=1.$

Theorem 2: If

4) $DX_k^{(n)} \geqslant c > 0$,

5) $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |X_k^{(n)}| = 0\left(\alpha_n B_n (\ln\ln B_n^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$,

then we have (3).

Theorem 3: If

6) $\alpha_n^3 \sum\limits_{k=1}^{n} DX_k^{(n)} (\ln\ln DX_k^{(n)})^{-1} \to \infty \ (n \to \infty)$,

7) $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |X_k^{(n)}| = 0\left(\alpha_n^3 \sum\limits_{k=1}^{n} DX_k^{(n)} \left(\ln\ln \sum\limits_{k=1}^{n} DX_k^{(n)}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$,

then we have (3)

Theorem 4: If (5) and

8) $\alpha_n \left(DS_n (\ln\ln DS_n)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \to \infty \ (n \to \infty)$,

then we have (3).