1966

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ЗАДАННЫХ НА ОДНОРОДНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Г. Ю. АЛЕШКЯВИЧЮС

Рассматривается однородный процесс Маркова $\{\xi_n;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ с дискретным временем с произвольным множеством состояний Ω, σ-алгеброй $\mathfrak{F}$ измеримых подмножеств множества Ω и функцией вероятностей перехода $p(\omega,\ A)$. Пусть $p^0(A)$ – произвольное начальное распределение, $p^n(\omega,\ A)$ – функция вероятностей перехода из состояния $\xi_0=\omega$ в измеримое множество A через n шагов.

Предполагается выполненным следующее *условие регулярности*: *существуют числа $n_0 \geqslant 1$ и δ_0 такие, что*

$$\sup_{\omega,\ \tilde{\omega},\ A} |p^{n_0}(\omega,\ A)-p^{n_0}(\tilde{\omega},\ A)|=\delta_0<1, \tag{0.1}$$

что равносильно существованию вероятностной меры $p(A)$ и чисел $\gamma<\infty$, $0<\rho<1$ таких, что для всех $n \geqslant n_0$

$$\sup_{\omega,\ A} |p^n(\omega,\ A)-p(A)| \leqslant \gamma\rho^n. \tag{0.2}$$

Несущественное изменение доказательств позволяет считать $\gamma \geqslant 1$ и $n_0=1$. Как известно, мера $p(A)$ называется *финальным распределением вероятностей*. Если она совпадает с начальным, то цепь Маркова называется *стационарной*.

Пусть $X_0,\ X_1,\ \ldots,\ X_n$ – случайные величины, заданные на цепи Маркова функциями распределения

$$\begin{aligned} &F_\omega^0(x)=\mathbf{P}\{X_0<x \mid \xi_0=\omega\}, \\ &F_{\omega\tilde{\omega}}(x)=\mathbf{P}\{X_n<x \mid \xi_{n-1}=\omega,\ \xi_n=\tilde{\omega}\}. \end{aligned} \tag{0.3}$$

В работе [8] было показано, что нормированные суммы

$$S_n=\frac{1}{B_n}\Big(\sum_{k=0}^{n} X_k-A_n\Big) \tag{0.4}$$

случайных величин, заданныя на регулярной цепи Маркова, в однородном случае могут иметь лишь устойчивые предельные распределения, и если последние не вырождены, то нормирующая последовательность констант имеет вид

$$B_n=\sigma n^{\frac{1}{\alpha}} h(n), \tag{0.5}$$

где α $(0<\alpha \leqslant 2)$ – показатель устойчивости предельного закона, $\sigma>0$ (σ зависит от α и распределения вероятностей величин $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$), $h(n)$ – медленно меняющаяся функция Карамата.

В предлагаемой работе установлены некоторые достаточные условия, а также и скорость сходимости к предельным законам (обобщение известной теоремы Ляпунова). Метод доказательства – метод характеристических функций в сочетании со спектральной теорией линейных операторов в пространстве Банаха.

I. Основные результаты. Введем следующие обозначения: символы $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{D}$ означают вероятность, математическое ожидание и дисперсию для стационарной цепи Маркова; дополнительный верхний индекс „o" – соответствующие понятия для цепи с произвольным начальным распределением. Если у $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ имеются нижние индексы „ω", „$\omega\tilde{\omega}$" (или „ξ_{n-1}", „$\xi_{n-1}\xi_n$"), то они обозначают условные вероятность, математическое ожидание и дисперсию, когда фиксированы соответствующие состояния цепи $(\xi_n)_0^\infty$. Например, (0.3), а также

$$
\begin{aligned}
&F_\omega(x)=\mathbf{P}\{X_n<x\mid\xi_{n-1}=\omega\}=\int_\Omega p(\omega,\,d\tilde{\omega})\,F_{\omega\tilde{\omega}}(x),\\
&f_{\omega\tilde{\omega}}(t)=\mathbf{M}_{\omega\tilde{\omega}}\,e^{itX_n}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dF_{\omega\tilde{\omega}}(x),\\
&f_\omega^0(t)=\mathbf{M}_\omega\,e^{itX_0}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dF_\omega^0(x).
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Сначала рассмотрим сходимость к нормальному закону. Пусть существуют

$$\mathbf{M}^0|X_0|,\quad \mathbf{M}^0X_k,\quad \mathbf{D}^0X_k\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

и

$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\mathbf{D}^0\Big(\sum_{k=0}^{n}X_k\Big)>0. \tag{1.2}$$

Положим

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{M}^0X_k,\qquad B_n=\sigma\sqrt{n},\qquad F_n(x)=\mathbf{P}^0(S_n<x),$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \tag{1.3}$$

Через $g(x)$ обозначим положительную симметричную функцию такую, что $\lim\limits_{|x|\to\infty}g(x)=\infty$, а $g(x)$ и $\frac{x}{g(x)}$ монотонны и не убывают на $(0,\ \infty)$.

Теорема 1. *Если цепь Маркова $(\xi_n)_0^\infty$ однородна и регулярна и для невырожденных случайных величин X_0, X_1, $\ldots$, X_n, заданных на цепи, существуют*

$$\mathbf{M}^0|X_0|<\infty,\quad \mathbf{M}X_1=0,\quad \sigma>0$$

и

$$\beta_{2g}=\sup_\omega\mathbf{M}_\omega\,|X_1|^2\,g(X_1)<\infty, \tag{1.4}$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{F}_1(x)=\Phi(x). \tag{1.5}$$

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 с* $g(x)=|x|^{\delta}$ $(0<\delta\leqslant 1)$ *равномерно относительно* x *справедливо неравенство*

$$|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_1 n^{-\frac{\delta}{2}}(1+2^{2+\delta}m_0+2^{\delta}5c_{\delta}^{-1}m^{1+\delta})\frac{\beta_{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}}+$$
$$+C_2 n^{-\frac{1}{2}}\frac{\beta_0+2m\beta_1}{\sigma}+C_3\lambda_0^n\frac{\beta_1\sigma^{\frac{2}{\delta}}}{\beta_{2+\delta}^{\frac{1}{\delta}}}\frac{m_0+\frac{m\lambda_0}{1-\lambda_0}}{1+2^{2+\delta}m_0+2^{\delta}5c_{\delta}^{-1}m^{1+\delta}}. \tag{1.6}$$

Здесь C_1, C_2, C_3, c_{δ} – некоторые абсолютные постоянные, λ_0 и λ_1 – корни уравнения

$$\frac{1}{1-\lambda}+\frac{2\gamma}{\lambda-\rho}=m\geqslant\frac{(\sqrt{2\gamma}+1)^2}{1-\rho}=m_0, \tag{1.7}$$

удовлетворяющие неравенствам

$$\rho<\lambda_0\leqslant\frac{\rho+\sqrt{2\gamma}}{1+\sqrt{2\gamma}}\leqslant\lambda_1<1. \tag{1.8}$$

Сформулируем частный случай теоремы 2 $(\delta=1)$.

Теорема 3. *Если цепь Маркова однородна и регулярна и для случайных величин* X_0, X_1, ..., X_n, *заданных на цепи, существуют*

$$\mathbf{M}^0|X_0|<\infty,\quad \mathbf{M}X_1=0,\quad \sigma>0$$

и

$$\beta_3=\sup_{\omega}\mathbf{M}_{\omega}|X_1|^3<\infty,$$

то равномерно относительно x *справедливо неравенство*

$$|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{C_1}{\sqrt{n}}\frac{\beta_3}{\sigma^3}(1+8m_0+60m^2)+$$
$$+\frac{C_2}{\sqrt{n}}\frac{\beta_0+2m\beta_1}{\sigma}+C_3\lambda_0^n\frac{\beta_1\sigma^2}{\beta_3}\frac{m_0+\frac{m\lambda_0}{1-\lambda_0}}{1+8m_0+60m^2}. \tag{1.9}$$

Условие существования положительного σ является необходимым для невырожденности слагаемых X_1, ..., X_n и предельного закона. Точнее, *если* $\sigma=0$, *то предельным законом распределения нормированной суммы* $S_n'=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=0}^{n}X_k-A_n\right)$ *является*

$$E(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

Рассмотрим сходимость к устойчивым законам, отличным от нормального, с показателем устойчивости α, $1<\alpha<2$. В этом случае необходимым условием сходимости к предельному закону является принадлежность функции стационарного распределения случайной величины X_1,

$$F(x)=\int_{\Omega}\int_{\Omega}p(d\omega)\,p(\omega,d\bar{\omega})\,F_{\omega\bar{\omega}}(x), \tag{1.10}$$

к области притяжения некоторого устойчивого закона с тем же показателем α:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(-x)}{1-F(x)}=\frac{c_1}{c_2};\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1-F(x)+F(-x)}{1-F(kx)+F(-kx)}=k^{\alpha}, \tag{1.11}$$

(см. [1], [2]). В этом случае $B_n = \sigma n^{\frac{1}{\alpha}} h(n)$, где $\sigma > 0$ $h(n)$ — медленно меняющаяся функция. Если $B_n = \sigma n^{\frac{1}{\alpha}}$, то говорят, что $F(x)$ принадлежит области нормального притяжения устойчивым законом с показателем α, и постоянная σ может быть вычислена следующим образом:

$$\sigma^\alpha = \lim_{t \to 0} \frac{2\mathbf{M} \sin^2 \frac{tX_1}{2}}{|t|^\alpha}. \tag{1.12}$$

Ограничимся рассмотрением случая нормального притяжения.

Теорема 4. *Пусть для невырожденных случайных величин $X_0, X_1, \ldots, X_n$, заданных на однородной регулярной цепи Маркова, выполнены условия:*

1) *существуют* $\mathbf{M}^0 |X_0| < \infty$, $\mathbf{M} X_1 = 0$ *и* $\beta_1 = \sup_\omega \mathbf{M}_\omega |X_1| < \infty$;

2) *функция $F(x)$ принадлежит области нормального притяжения устойчивого закона с показателем α, $1 < \alpha < 2$ и $\sigma > 0$* (см. (1.12)).

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = V_\alpha(x),$$

где $V_\alpha(x)$ — устойчивый закон с тем же показателем α и характеристической функцией

$$v_\alpha(t) = e^{-|t|^\alpha \left(1 + i\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sign} t\right)}, \tag{1.13}$$

(β — вещественный параметр).

Если $\sigma = 0$ (при соблюденных прочих условиях), то функция распределения нормированной суммы

$$S_n' = \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\sum_{k=0}^{n} X_k - A_n \right)$$

сходится к вырожденному закону $E(x)$.

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы 4 и для функций распределения $F(x)$ и $V_\alpha(x)$ существует псевдомомент*

$$\beta_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x^2 d\left(F(x) - V_\alpha(x)\right) \right| < \infty, \tag{1.14}$$

то равномерно относительно x $(-\infty < x < \infty)$

$$|F_n(x) - V_\alpha(x)| \leqslant C_1 n^{1 - \frac{2}{\alpha}} \frac{\beta_2 + 12m\beta_1^2 + c^2\sigma^2}{2\sigma^2} + $$

$$+ C_2 n^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{\beta_0 + 2m\beta_1}{\sigma} + C_3 \lambda_0^n \frac{\beta_1 \sigma^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \left(m_0 + \frac{m\lambda_0}{1 - \lambda_0}\right)}{(\beta_2 + 12m\beta_1^2 + c^2\sigma^2)^{\frac{1}{2-\alpha}}}, \tag{1.15}$$

где C_1, C_2 и *C_3 — некоторые абсолютные постоянные, m, m_0, λ_1, λ_0 определены в теореме 2, $c^2 = 1 + \beta^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi\alpha}{2}$* (см. формулу (1.13)).

2. Основные леммы. Пусть $\mathfrak{X}$ — пространство Банаха ограниченных измеримых функций, заданных на Ω и принимающих комплексные значения;

$\mathfrak{M}$ — пространство Банаха всех вполне аддитивных (счетно аддитивных) мер на $\mathfrak{F}$ с комплексными значениями и ограниченной полной вариацией (см. [3], [4]).

Пусть $P(t)$ — линейный оператор, переводящий пространство $\mathfrak{X}$ в себя по формуле ($\eta\in\mathfrak{X}$)

$$\left(P(t)\,\eta\right)(\omega)=\int\limits_{\Omega}\eta(\overline{\omega})\,f_{\omega\overline{\omega}}(t)\,p(\omega,\,d\overline{\omega}),\tag{2.1}$$

с нормой

$$\|P(t)\|=\sup_{\omega\in\Omega}\int\limits_{\Omega}|f_{\omega\overline{\omega}}(t)|\,p(\omega,\,d\overline{\omega}).\tag{2.2}$$

Через $\mu\eta$ обозначим линейный функционал („скалярное произведение"), определенный равенством

$$\mu\eta=\int\limits_{\Omega}\eta(\omega)\,\mu(d\overline{\omega}),\quad(\mu\in\mathfrak{M},\ \eta\in\mathfrak{X}).\tag{2.3}$$

Если $\mu(A)$ — вероятностная мера, то $\mu\eta$ — математическое ожидание случайной величины η. Этим объясняется введение позиционной записи „скалярного произведения" против традиционного использования скобок.

Пусть P_1 — проектор пространства $\mathfrak{X}$, определенный финальным распределением вероятностей $p(A)$ и

$$R(\lambda)=\frac{P_1}{\lambda-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P^n-P_1}{\lambda^{n+1}}=R_1(\lambda)+R_0(\lambda),\tag{2.4}$$

$$R(t,\lambda)=R(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\left[G(t)\,R(\lambda)\right]^n\tag{2.5}$$

— резольвенты операторов $P=P(0)$ и $P(t)$ соответственно. Здесь

$$R_1(\lambda)=\frac{P_1}{\lambda-1},\quad \|R_1(\lambda)\|=\frac{1}{|\lambda-1|};$$

$$R_0(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P^n-P_1}{\lambda^{n+1}},\quad \|R_0(\lambda)\|\leqslant\frac{2\gamma}{|\lambda|-\rho},\quad(|\lambda|>\rho);$$

$$G(t)=P(t)-P,\quad \|G(t)\|=\Theta=\sup_{\omega}\int\limits_{\Omega}|f_{\omega\overline{\omega}}(t)-1|\,p(\omega,\,d\overline{\omega})$$

и

$$m(\lambda)=\frac{1}{|\lambda-1|}+\frac{2\gamma}{|\lambda|-\rho}\geqslant\frac{(\sqrt{2\gamma}+1)^2}{1-\rho}>\frac{2\gamma}{1-\rho}=m_0.$$

Пусть λ_0 и λ_1 — корни уравнения $m(\lambda)=m$, удовлетворяющие неравенству

$$\rho<\lambda_0\leqslant\frac{\rho+\sqrt{2\gamma}}{1+\sqrt{2\gamma}}\leqslant\lambda_1<1.$$

Если $m\geqslant\frac{(\sqrt{2\gamma}+1)^2}{1-\rho}$ и $\Theta<\frac{1}{m}$, то ряд (2.5) сходится в области, определенной условиями $|\lambda|\geqslant\lambda_0$, $|\lambda-1|\geqslant\varepsilon_1=1-\lambda_1$. Таким образом, окружности $I_1=\{\lambda:|\lambda-1|=\varepsilon_1\}$ и $I_0=\{\lambda:|\lambda|=\lambda_0\}$ целиком лежат в резольвентном множестве оператора $P(t)$.

Лемма 1 (см. [3], [5]–[6]). *Существует* $\varepsilon>0$ *такое, что при* $\Theta<\varepsilon$ *имеет место разложение*

$$P^n(t)=\lambda^n(t)\ P_1(t)+P^n(t)\ P_0(t), \tag{2.6}$$

где

$$\lambda(t)=\frac{p\,P(t)\ P_1(t)\,\psi}{p\,P_1(t)\,\psi}, \tag{2.7}$$

$$P_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{I_1} R(t,\ \lambda)\ d\lambda, \tag{2.8}$$

$$P_0(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{I_0} R(t,\ \lambda)\ d\lambda. \tag{2.9}$$

Здесь $\psi(\omega)\equiv 1$. *В качестве* ε *можно положить*

$$\varepsilon=\frac{1}{m(1+\varepsilon_1 m)}, \qquad (\varepsilon_1=1-\lambda_1).$$

Воспользовавшись разложениями (2.4) и (2.5) резольвент $R(\lambda)$ и $R(t,\ \lambda)$, прямым вычислением убеждаемся в справедливости равенства

$$\lambda(t)-1=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n(t)}{1+\sum\limits_{n=2}^{\infty} C_n(t)}, \tag{2.10}$$

где

$$\begin{aligned} B_n(t)&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{I_1} p\,[G(t)\ R(\lambda)]^{n-1}\ G(t)\ \psi\ \frac{d\lambda}{\lambda-1}, \quad (n\geqslant 1),\\ C_n(t)&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{I_1} p\,[G(t)\ R(\lambda)]^{n-1}\ G(t)\ \psi\ \frac{d\lambda}{(\lambda-1)^2}, \quad (n\geqslant 2). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Из легко устанавливаемых неравенств

$$|B_n(t)|\leqslant\Theta\,(m\,\Theta)^{n-1}; \qquad |C_n(t)|\leqslant\frac{(m\Theta)^n}{m\varepsilon_1} \tag{2.12}$$

получаем следующие оценки:

$$\begin{gathered} |\lambda(t)-1-B_1(t)|\leqslant 6\,m\,\Theta^2\\ |\lambda(t)-1-B_1(t)-B_2(t)|\leqslant 10\ m^2\,\Theta^3. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Дальнейший анализ собственного числа $\lambda(t)$ требует предположения некоторой непрерывности функции $\Theta=\Theta(t)=\|P(t)-P\|$.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{M}\,X_1=0$, $\sigma>0$ *и для некоторого числа* $\delta\,(0<\delta\leqslant 1)$ *пусть существует*

$$\beta_{2+\delta}=\sup_{\omega}\mathbf{M}_\omega\,|X_1|^{2+\delta}<\infty. \tag{2.14}$$

Тогда существует число $\Delta\,(0<\Delta<1)$ *и зависящие от него числа* Δ' и Δ^* *такие, что равномерно для всех* t *из интервала*

$$|t|\leqslant T_n=\sqrt{n}\,\left(\frac{\Delta'}{2c_\delta\,w(m)}\ \frac{\sigma^{2+\delta}}{\beta_{2+\delta}}\right)^{\frac{1}{\delta}} \tag{2.15}$$

справедливо неравенство

$$\left| n \ln \lambda \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right) + \frac{t^2}{2} \right| \leqslant \Delta^* c_\delta w(m) \frac{\beta_{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}} |t|^{2+\delta} n^{-\frac{\delta}{2}} < (1-\Delta) \frac{t^2}{2}. \quad (2.16)$$

Здесь

$$c_\delta = \sup_{-\infty < x < +\infty} \frac{\left| e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2} \right|}{|x|^{2+\delta}}; \quad \left(c_1 = \frac{1}{6} \right) \quad (2.17)$$

$$w(m) = 1 + 2^{2+\delta} m_0 + 2^\delta 5 c_\delta^{-1} m^{1+\delta}. \quad (2.18)$$

Лемма 3. *Пусть существуют*

$$\mathbf{M} X_1 = 0, \quad \sigma > 0$$

и

$$\beta_{2g} = \sup_\omega \mathbf{M}_\omega |\mathbf{X}_1|^2 g(X_1) < \infty. \quad (2.19)$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^n \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (2.20)$$

равномерно на каждом конечном интервале $|t| \leqslant A$.

Лемма 4. *Пусть существуют*

$$\mathbf{M} X_1 = 0, \quad \beta_1 = \sup_\omega \mathbf{M}_\omega |X_1|,$$

$$\sigma^\alpha = \lim_{t\to 0} \frac{2 \mathbf{M} \sin^2 \frac{tX_1}{2}}{|t|^\alpha} > 0, \quad (1 < \alpha < 2)$$

и

$$\beta_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x^2 d\left(F(x) - V_\alpha(x) \right) \right| < \infty. \quad (2.21)$$

Тогда можно найти число Δ $(0 < \Delta < 1)$ *и от него зависящее число* Δ^* *такие, что для всех* t *из интервала*

$$|t| \leqslant T_n = \left(\Delta^* \frac{2\sigma^2}{\beta_2 + 12 m \beta_1^2 + c^2 \sigma^2} \right)^{\frac{1}{2-\alpha}} n^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.22)$$

справедливо неравенство

$$\left| n \ln \lambda \left(\frac{t}{\sigma n^{\frac{1}{\alpha}}} \right) - \ln v_\alpha \left(\frac{t}{\sigma} \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1-\Delta}{\Delta^*} \cdot \frac{\beta_2 + 12 m \beta_1^2 + c^2 \sigma^2}{2\sigma^2} n^{1 - \frac{2}{\alpha}} t^2 < (1-\Delta) |t|^\alpha. \quad (2.23)$$

Здесь $c^2 = 1 + \beta^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi\alpha}{2}$; β — *вещественный параметр в формуле* (1.13).

Лемма 5. *Пусть существуют*

$$\mathbf{M}^0 X_0, \quad \mathbf{M} X_1 (=0),$$

$$\beta_1 = \sup_\omega \mathbf{M}_\omega |X_1 - \mathbf{M} X_1| < \infty$$

и

$$\beta_0=\mathbf{M}^0\,|\,\mathbf{X}_0-\mathbf{M}^0 X_0\,|+\sum_{n=1}^{\infty}|\,\mathbf{M}^0 X_n-\mathbf{M}\,X_n\,|<\infty. \tag{2.24}$$

Тогда для всех t из интервала

$$|\,t\,|<\frac{1}{\beta_1\,m\,[1+\varepsilon_1 m]} \tag{2.25}$$

справедливы неравенства

$$|\,p^0(t)\,P_1(t)\,\psi-1\,|\leqslant|\,t\,|\,(\beta_0+2\,m\,\beta_1), \tag{2.26}$$

$$|\,p^0(t)\,P^n(t)\,P_0(t)\,\psi\,|\leqslant|\,t\,|\,\beta_1\left(m_0+\frac{m\lambda_0}{1-\lambda_0}\right)\lambda_0^n. \tag{2.27}$$

Доказательство лемм 2—5. В силу того, что

$$\mathbf{M}\,X_1=0 \quad \text{и} \quad \beta_1=\sup_{\omega}\mathbf{M}_{\omega}\,|\,X_1\,|<\infty,$$

мы получаем, что

$$\Theta=\|\,P(t)-P\,\|\leqslant\sup_{\omega}\mathbf{M}_{\omega}\,|\,e^{itX_1}-1\,|\leqslant|\,t\,|\,\beta_1. \tag{2.28}$$

Следовательно, в открытом интервале $|\,t\,|<\frac{1}{\beta_1\,m\,[1+\varepsilon_1 m]}$ справедливы неравенства (2.13) и $|\,\lambda(t)-1\,|<1-\lambda_1=\varepsilon_1$. Тогда из очевидного неравенства

$$|\ln(1+z)-z\,|\leqslant\frac{|\,z\,|^2}{2\lambda_1} \qquad (\,|\,z\,|\leqslant 1-\lambda_1)$$

следует, что

$$\left|\ln\lambda(t)+\frac{t^2}{2}\right|\leqslant W(t)+\frac{1}{2\lambda_1}\left[\frac{\sigma^2 t^2}{2}+W(t)\right]^2, \tag{2.29}$$

где

$$W(t)=\left|B_1(t)+\frac{t^2}{2}\,\mathbf{D}\,X_1\,|+|\,B_2(t)+t^2\sum_{n=2}^{\infty}\mathbf{M}\,X_1\,X_n\right|+$$
$$+\,|\,\lambda(t)-1-B_1(t)-B_2(t)\,|. \tag{2.30}$$

Пусть теперь выполнены условия леммы 2. Воспользуемся неравенством Минковского и элементарным неравенством

$$\left|e^{ix}-1-ix+\frac{x^2}{2}\right|\leqslant c_\delta\,|\,x\,|^{2+\delta} \tag{2.31}$$

$(-\infty<x<\infty,\ 0<\delta\leqslant 1)$. Тогда получаем следующие оценки:

$$\left|B_1(t)+\frac{t^2}{2}\,\mathbf{D}\,X_1\right|=\left|\mathbf{M}\left(e^{itX_1}-1-itX_1+\frac{t^2}{2}\,X_1^2\right)\right|\leqslant c_\delta\,|\,t\,|^{2+\delta}\,\beta_{2+\delta}, \tag{2.32}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left|B_2(t)+t^2\sum_{n=2}^{\infty}\mathbf{M}\,X_1\,X_n\right|\leqslant\\
&\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\left|(\mathbf{M}-\mathbf{M}')\left[e^{it(X_1+X_n)}-1-it(X_1+X_n)+\frac{t^2}{2}(X_1+X_n)^2\right]\right|\leqslant\\
&\leqslant c_\delta\,|\,t\,|^{2+\delta}\left[2^{3+\delta}\,\mathbf{M}\,|\,X_1\,|^{2+\delta}+\sum_{n=3}^{\infty}|\,\mathbf{M}-\mathbf{M}'\,|\,\,|\,X_1+X_n\,|^{2+\delta}\right]\leqslant
\end{aligned}\right\} \tag{2.33}$$
$$\leqslant c_\delta\,2^{2+\delta}\,m_0\,\beta_{2+\delta}\,|\,t\,|^{2+\delta};$$

(здесь штрих у знака математического ожидания означает, что оно применяется к независимым и одинаково распределенным случайным величинам с функцией распределения $F(x)$)

$$|\lambda(t)-1-B_1(t)-B_2(t)|\leqslant 10\,m^2\,\Theta^3\leqslant 2^\delta\,5\,m^{1+\delta}\,\beta_{2+\delta}\,|t|^{2+\delta}. \tag{2.34}$$

Из (2.29)–(2.34) следует

$$\left|n\ln\lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+\frac{t^2}{2}\right|\leqslant\frac{t^2}{2}\,[z+qz^{\frac{2}{\delta}}\,(1+z)^2], \tag{2.35}$$

где

$$z=2c_\delta\,w(m)\,\frac{\beta_{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}}\,|t|^\delta\,n^{-\frac{\delta}{2}}, \tag{2.36}$$

$$q=\frac{1}{4\lambda_1}\left(\frac{\sigma^{2+\delta}}{2\,c_\delta\,w(m)\,\beta_{2+\delta}}\right)^{\frac{2}{\delta}}, \tag{2.37}$$

$$w(m)=1+2^{\delta+2}\,m_0+2^\delta\,5\,c_\delta^{-1}\,m^{1+\delta}. \tag{2.38}$$

Так как $\sigma^2\leqslant 2\,m_0\,\beta_2$ и $\lambda_1>\frac{\sqrt{2\gamma}}{1+\sqrt{2\gamma}}$, то

$$q\leqslant\frac{1-\rho}{(24+16\sqrt{2})\,5^{\frac{2}{\delta}}}\left(\frac{\sqrt{2\gamma}}{1+\sqrt{2\gamma}}\right)^{1+\frac{2}{\delta}}<\frac{1}{1165} \tag{2.39}$$

и из монотонности функции $\varphi(z)=z+qz^{\frac{2}{\delta}}\,(1+z)^2$ на интервале $0\leqslant z<\infty$ следует, что для любого $\Delta\,(0<\Delta<1)$ существует единственное $\Delta'\,(0<\Delta'<\Delta)$, зависящее от q и Δ, такое, что для $0\leqslant z\leqslant\Delta'$ справедливо неравенство $\varphi(z)\leqslant 1-\Delta$. Полагая

$$\Delta^*=1+q\,(\Delta')^{\frac{2}{\delta}}\,(1+\Delta')^2, \tag{2.40}$$

$$T_n=\left(\Delta'\,\frac{\sigma^{2+\delta}}{2\,c_\delta\,w(m)\,\beta_{2+\delta}}\right)^{\frac{1}{\delta}}\,n^{\frac{1}{2}}, \tag{2.41}$$

получаем искомое неравенство

$$\left|n\ln\lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+\frac{t^2}{2}\right|\leqslant\Delta^*\,c_\delta\,w(m)\,\frac{\beta_{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}}\,|t|^{2+\delta}\,n^{-\frac{\delta}{2}}<\frac{1-\Delta}{2}\,t^2. \tag{2.42}$$

Пусть теперь выполнены условия леммы 3. Положим $\delta_n\to 0$ $(n\to\infty)$ и разложим случайную величину X на две части:

$$X=Y\vee Z=\begin{cases} Y, & \textit{если}\quad |X|<\dfrac{6\delta_n}{|t|}\\ Z, & \textit{если}\quad |X|\geqslant\dfrac{6\delta_n}{|t|}. \end{cases} \tag{2.43}$$

Тогда из элементарного неравенства

$$\left|e^{ix}-1-ix+\frac{x^2}{2}\right|\leqslant\begin{cases} |x|^2\,\delta_n, & \textit{если}\quad |x|<6\,\delta_n\\ |x|^2, & \textit{если}\quad |x|\geqslant 6\,\delta_n \end{cases} \tag{2.44}$$

(x — вещественное) аналогичным образом получаем оценки:

$$\left|B_1(t)+\frac{t^2}{2}\,\mathbf{D}\,X_1\right| \leqslant \left(\delta_n\,\mathbf{D}\,X_1+\frac{\beta_{2g}}{g\left(\frac{6\delta_n}{t}\right)}\right)t^2, \tag{2.45}$$

$$\left|B_2(t)+t^2\sum_{n=2}^{\infty}\mathbf{M}\,X_1X_n\right| \leqslant (4m_0-1)\left(\beta_2\delta_n+\frac{2\beta_{2g}}{g\left(\frac{3\delta_n}{t}\right)}\right)t^2, \tag{2.46}$$

$$|\lambda(t)-1-B_1(t)-B_2(t)|\leqslant 10\,m^2\beta_1^3\,|t|^3. \tag{2.47}$$

Положим

$$\delta_n(t)=\max\left(\delta_n;\ \frac{1}{g\left(\frac{3\sigma\sqrt{n}\,\delta_n}{t}\right)}\right), \tag{2.48}$$

$$z=8\,m_0\,\frac{\beta_{2g}}{\sigma^2}\,\delta_n(t)+20\,m^2\,\frac{\beta_1^3}{\sigma^3}\,\frac{|t|}{\sqrt{n}}. \tag{2.49}$$

Тогда из (2.29) — (2.30) и (2.45) — (2.49) следует

$$\left|n\ln\lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+\frac{t^2}{2}\right|\leqslant\frac{t^2}{2}\left[z+\frac{t^2}{4\lambda_1}(1+z)^2\right]. \tag{2.50}$$

В силу предположения, что $\delta_n\to 0$ $(n\to\infty)$ и $g(x)\to\infty$ $(|x|\to\infty)$, из (2.50) получаем, что равномерно на каждом конечном интервале $|t|\leqslant A$,

$$\lim_{n\to\infty}\lambda^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{2.51}$$

Для доказательства леммы 4 достаточно воспользоваться очевидными неравенствами:

$$|e^z-1-z|\leqslant\frac{|z|^2}{2}\max(1,\ e^{\mathrm{Re}\,z}),$$

$$|\ln(z+1)-z|\leqslant\frac{|z|^2}{2\lambda_1},\qquad (|z|\leqslant 1-\lambda_1=\varepsilon_1),$$

$$\left|\ln\frac{\lambda}{v}\right|\leqslant\frac{|\lambda-1|^2}{2\lambda_1}+\frac{|\ln v|^2}{2}+|\lambda-1-B_1|+|B_1+1-v_\alpha|.$$

Тогда в предположениях леммы из оценок (2.13) и

$$|B_1(t)+1-v_\alpha(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1-itx)\,d\left(F(x)-V_\alpha(x)\right)\right|\leqslant\frac{t^2}{2}\,\beta_2 \tag{2.52}$$

следует

$$\begin{aligned}
&\left|n\ln\lambda\left(\frac{t}{\sigma n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)-\ln v_\alpha\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right|\leqslant\\
&\leqslant\frac{n}{2\lambda_1}\left|\lambda\left(\frac{t}{\sigma n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)-1\right|^2+\frac{c^2}{2n}|t|^{2\alpha}+\frac{\beta_2+12\,m\beta_1^2}{2\sigma^2}\,t^2 n^{1-\frac{2}{\alpha}}\leqslant\\
&\leqslant\frac{\beta_2+12\,m\beta_1^2}{2\sigma^2}\,t^2n^{1-\frac{2}{\alpha}}+\frac{c^2}{2n}|t|^{2\alpha}+\\
&+\frac{|t|^{2\alpha}}{2\lambda_1 n}\left(c+\frac{\beta_2+12\,m\beta_1^2}{2\sigma^2}\,|t|^{2-\alpha}n^{1-\frac{2}{\alpha}}\right)^2
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$\left(\text{здесь } c^2=1+\beta^2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\pi\alpha}{2}\right).$

Так как функция

$$\varphi(z)=\frac{\beta_2+12\,m\,\beta_1^2}{2\,\sigma^3}\,z^{3-\alpha}+\frac{1+\lambda_1}{2\,\lambda_1}\,c^2\,z^\alpha+\frac{\beta_2+12\,m\,\beta_1^2}{2\,\sigma^3}\,c\,z^2+\frac{c^4}{8\,\lambda_1}\,z^{2\alpha} \quad (2.54)$$

является симметричной на $(-\infty,\ \infty)$ и монотонно возрастающей на $(0,\ \infty)$, то для любого заданного числа Δ $(0<\Delta<1)$ существует единственное число $\Delta^*=\Delta^*(\Delta)$ такое, что для всех t из интервала

$$|t|\leqslant T_n=\left(\Delta^*\,\frac{2\,\sigma^3}{\beta_2+12\,m\,\beta_1^2+c^2\,\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}} n^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.55)$$

справедливо неравенство

$$\left|n\ln\lambda\left(\frac{t}{\sigma n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)-\ln v_\alpha\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1-\Delta}{\Delta^*}\;\frac{\beta_2+12\,m\,\beta_1+c^2\,\sigma^2}{2\,\sigma^3}\;n^{1-\frac{2}{\alpha}}\;t^2<(1-\Delta)\,|t|^\alpha. \quad (2.56)$$

Доказательство леммы 5. Согласно определению операторов $P_1(t)$ и $P_0(t)$ имеем:

$$\begin{aligned} p^0(t)\,P_1(t)\,\psi &= \frac{1}{2\pi i}\int_{I_1} p^0(t)\,R(t,\ \lambda)\,\psi\,d\lambda = \\ &= 1+\mathbf{M}^0\left(e^{it(X_0-a)}-1\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathbf{M}^0\,e^{it(X_0-a)}\left(e^{itX_n}-1\right)-\right. \\ &\left.-\mathbf{M}^0\,e^{it(X_0-a)}\,\mathbf{M}\left(e^{itX_n}-1\right)\right]+\frac{1}{2\pi i}\int_{I_1} p^0(t)\,R(\lambda)\,G(t)\,R(t,\lambda)\,G(t)\,\psi\,\frac{d\lambda}{\lambda-1}; \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} p^0(t)\,P^n(t)\,P_0(t)\,\psi &= \frac{1}{2\pi i}\int_{I_0}\lambda^n\,p^0(t)\,R(t,\ \lambda)\,\psi\,d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{I_0}\lambda^n\,p^0(t)\,R(\lambda)\,G(t)\,R(t,\ \lambda)\,G(t)\,\psi\,\frac{d\lambda}{\lambda-1}- \\ &-\sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\mathbf{M}^0\left(e^{itX_k}-1\right)e^{it(X_0-a)}-\mathbf{M}^0\,e^{it(X_0-a)}\,\mathbf{M}\left(e^{itX_k}-1\right)\right]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Здесь:

$$p^0(t)(A)=\int_A f^0_\omega(t)\,p^0(d\omega)$$

— конечная мера на $\mathfrak{F}$, принадлежащая пространству $\mathfrak{M}$,

$$a=\mathbf{M}^0\,X_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathbf{M}^0\,X_n-\mathbf{M}\,X_n\right].$$

Из (2.57), очевидно, следует

$$\begin{aligned} |p^0(t)\,P_1(t)\,\psi-1| &\leqslant |t|\left[\mathbf{M}^0\,|X_0-a|+m_0\,\beta_1+2\,m^2\,\beta_1\,|t|\,\right]\leqslant \\ &\leqslant |t|\left[\beta_0+(m_0+m)\,\beta_1\right]\leqslant |t|\,(\beta_0+2\,m\,\beta_1) \end{aligned} \quad (2.59)$$

и аналогичным образом из (2.58)

$$|p^0(t)\,P^n(t)\,P_0(t)\,\psi| \leqslant |t|\,\frac{2\gamma\rho^n}{1-\rho}\,\beta_1 + 2m^2\beta_1^2\,|t|^2\,\frac{\lambda_0^{n-1}}{1-\lambda_0} <$$

$$< |t|\,\beta_1\left(m_0 + \frac{m\lambda_0}{1-\lambda_0}\right)\lambda_0^n. \tag{2.60}$$

3. Доказательство теорем. Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что характеристическая $f_n(t)$ нормированной суммы S_n сходится (при $n\to\infty$) к $\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}$ равномерно на каждом конечном интервале $|t|\leqslant A$ (A — любое положительное число).

Характеристическую функцию суммы S_n можно представить в следующем виде:

$$f_n(t) = \mathbf{M}^0\, e^{i\frac{t}{B_n}\sum\limits_{k=0}^{n}(X_k-\mathbf{M}^0X_k)} = \mathbf{M}^0\, e^{i\frac{t}{B_n}(X_0-a)}\, e^{i\frac{t}{B_n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\mathbf{M}\,X_k)} =$$

$$= p^0\left(\frac{t}{B_n}\right) P^n\left(\frac{t}{B_n}\right)\psi, \tag{3.1}$$

где

$$a = \mathbf{M}^0\,X_0 + \sum_{k=1}^{n}(\mathbf{M}^0\,X_k - \mathbf{M}\,X_k),$$

$P(t)$ — оператор, определенный равенством (2.1), с $\mathbf{M}\,X_1=0$.
$p^0(t)(A)$ — мера на $\mathfrak{F}$, определенная равенством

$$p^0(t)(A) = \int_A f_\omega^0(t)\,e^{-ita}\,p^0(d\omega), \qquad (A\in\mathfrak{F}). \tag{3.2}$$

Согласно лемме 1 имеем разложение

$$f_n(t) = \lambda^n\left(\frac{t}{B_n}\right) p^0\left(\frac{t}{B_n}\right) P_1\left(\frac{t}{B_n}\right)\psi + p^0\left(\frac{t}{B_n}\right) P^n\left(\frac{t}{B_n}\right) P_0\left(\frac{t}{B_n}\right)\psi =$$

$$= \lambda^n\left(\frac{t}{B_n}\right) A\left(\frac{t}{B_n}\right) + r_n\left(\frac{t}{B_n}\right), \tag{3.3}$$

где в силу леммы 5 ($n\to\infty$)

$$A\left(\frac{t}{B_n}\right) = p^0\left(\frac{t}{B_n}\right) P_1\left(\frac{t}{B_n}\right)\psi \to 1, \tag{3.4}$$

$$r_n\left(\frac{t}{B_n}\right) = p^0\left(\frac{t}{B_n}\right) P^n\left(\frac{t}{B_n}\right) P_0\left(\frac{t}{B_n}\right)\psi \to 0. \tag{3.5}$$

Из леммы 3 следует, что равномерно для всех $|t|\leqslant A$

$$\lim_{n\to\infty}\lambda^n\left(\frac{t}{B_n}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{3.6}$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, если $\sigma=0$, то распределение нормированной суммы

$$S_n' = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}(X_k - \mathbf{M}^0\,X_k) \tag{3.7}$$

имеет предельную характеристическую функцию, равную единице, что означает вырожденность предельного закона.

Доказательство теоремы 4. Докажем существование предела характеристической функции $f_n(t)$ нормированной суммы S_n: равномерно по $|t| \leqslant A$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = v_\alpha(t), \tag{3.8}$$

где

$$\ln v_\alpha(t) = ita - c|t|^\alpha \left(1 + i\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sign} t\right). \tag{3.9}$$

Так как в условиях теоремы 4 также имеют место соотношения (3.4) и (3.5), то из (3.3) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{t}{B_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda^n \left(\frac{t}{B_n}\right). \tag{3.10}$$

В силу предположений теоремы 4 имеют место соотношения

$$|\lambda(t) - 1 - \mathbf{M}(e^{itX_1} - 1)| \leqslant 6m\beta_1^2 |t|^2, \tag{3.11}$$

$$|\ln \lambda(t) - (\lambda(t) - 1)| \leqslant \frac{|\lambda(t) - 1|^2}{2\lambda_1}. \tag{3.12}$$

Условие, что распределение $F(x)$ величины X_1 принадлежит области нормального притяжения устойчивым законом V_α, записывается в виде

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbf{M}\left(e^{it\frac{X_1}{B_n}} - 1\right) = \ln v_\alpha(t). \tag{3.13}$$

Соотношения (3.10)—(3.13) доказывают равенство

$$\lim_{n\to\infty} n \ln \lambda\left(\frac{t}{B_n}\right) = \ln v_\alpha(t), \tag{3.14}$$

а вместе с ним и (3.8).

Пусть теперь $B_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ и

$$\sigma^\alpha = \lim_{t\to 0} \frac{2\mathbf{M}\sin^2 \frac{tX_1}{2}}{|t|^\alpha} = 0. \tag{3.15}$$

Это означает, что равномерно для всех $|t| \leqslant A$

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{Re} \ln \lambda\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right) = 0. \tag{3.16}$$

Таким образом, предельная характеристическая функция нормированной суммы

$$S'_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{k=0}^{n} (X_k - \mathbf{M}^0 X_k) \tag{3.17}$$

всюду на $|t| \leqslant A$ по модулю равна единице. Это означает вырожденность предельного закона, что и требовалось доказать.

Доказательство теорем 2 и 5. Из лемм 2 и 5 следует, что для всех t из интервала (2.15)

$$|t| \leqslant T_n = \left(\frac{\Delta'}{2 c_\delta w(m)} \; \frac{\sigma^{2+\delta}}{\beta_{2+\delta}}\right)^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{n}$$

справедливо неравенство

$$|f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}| \leqslant \lambda_0^n \frac{|t|}{\sqrt{n}} \frac{\beta_1}{\sigma} \left(m_0 + \frac{m\lambda_0}{1-\lambda_0}\right) +$$

$$+ e^{-\frac{\Delta t^2}{2}} \left[\frac{\Delta}{\Delta'} c_\delta w(m) \frac{\beta_{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}} \frac{|t|^{2+\delta}}{n^{\frac{\delta}{2}}} + \frac{\beta_0 + 2m\beta_1}{\sigma} \frac{|t|}{\sqrt{n}}\right]. \tag{3.18}$$

Аналогично из лемм 4 и 5 получаем, что в интервале (2.22)

$$|t| \leqslant T_n = \left(\Delta^* \frac{2\sigma^2}{\beta_2 + 12 m \beta_1^2 + c^2 \sigma^2}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}} n^{\frac{1}{\alpha}}$$

имеет место оценка

$$|f_n(t) - v_\alpha(t)| \leqslant \lambda_0^n \frac{|t|}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\beta_1}{\sigma} \left(m_0 + \frac{m\lambda_0}{1-\lambda_0}\right) +$$

$$+ e^{-\Delta |t|^\alpha} \left[\frac{1-\Delta}{\Delta^*} \frac{\beta_2 + 12 m \beta_1^2 + c^2 \sigma^2}{2\sigma^2} n^{1-\frac{2}{\alpha}} |t|^2 + \frac{|t|}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\beta_0 + 2m\beta_1}{\sigma}\right]. \tag{3.19}$$

Применив к (3.18) и к (3.19) оценки типа Берри-Эссеена [2] или В. М. Золотарева [7], получаем доказательство названных теорем.

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую признательность В. А. Статулявичюсу за внимание к моей работе.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
24.II.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.
2. М. Лоэв, Теория вероятностей, ИЛ, М., 1962.
3. Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962.
4. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы, ИЛ, М., 1962.
5. С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Теор. вероятн. и ее прим., т. 2, № 4 (1957), 389—416
6. С. В. Нагаев, Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова, Теор. вероятн. и ее прим., т. 6, № 1 (1961), 67—86.
7. В. М. Золотарев, О близости распределений двух сумм независимых случайных величин, Теор. вероятн. и ее прим., т. 10, № 3 (1965), 519—525.
8. Г. Ю. Алешкявичюс, О центральной предельной проблеме для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова, Лит. мат. сб., т. 6, № 1 (1966), 15—22.

ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ, APIBRĖŽTŲ MARKOVO GRANDINĖJE, SUMŲ RIBINIŲ TEOREMŲ KLAUSIMU

G. J. ALEŠKEVIČIUS

(*R e z i u m ė*)

Tegu $X_0, X_1, \ldots, X_n$ yra atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti reguliarioje Markovo grandinėje. Darbe yra surastos normuotų sumų $S_n=\frac{1}{B_n}\left(\sum_{k=0}^{n} X_k-A_n\right)$ pasiskirstymo konvergavimo į ribinį dėsnį pakankamos sąlygos ir įvertintas konvergavimo greitis (1—3 teoremose — kai ribinis dėsnis yra normalinis, 4—5 teoremose — kai ribinis dėsnis stabilus su rodikliu α, $1<\alpha<2$).

SOME LIMIT THEOREMS FOR SUMS OF THE RANDOM VARIABLES DEFINED ON A MARKOV PROCESS WITH DISCRETE PARAMETER

G. J. ALEŠKEVIČIUS

(*S u m m a r y*)

In this paper probability limit theorems for sums of random variables $X_0, X_1, \ldots, X_n$ defined on a regular Markov process with discrete parameter and with stationary one step transition probability function are considered. The sufficient conditions and the rate of convergence to the normal limit law (theorems 1—3) and to the stable law with exponent α, $1<\alpha<2$, (theorems 4—5) are obtained.