VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1966

О НОРМАЛИЗАЦИЯХ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДАЕМЫХ ЗАДАННОЙ В НЕМ СЕТЬЮ

В. Т. БАЗЫЛЕВ

1. Если в проективном n-пространстве P_n задана сеть Σ_n, то-есть в некоторой области $\Omega \subset P_n$ заданы n линейно независимых полей 1-направлений, то существует много инвариантных способов [1] сопоставить каждой точке $A \in \Omega$ некоторую гиперплоскость $P_{n-1}(A)$ пространства P_n, причем $A \notin P_{n-1}(A)$. Каждый из этих способов позволяет рассматривать область Ω нормализованной в смысле А. П. Нордена [2] и определяет в этой области соответствующую аффинную связность ∇.

Мы отнесем область Ω к подвижному проективному реперу $\{A, A_i\}$ с началом $A \in \Omega$ и вершинами A_i, расположенными на касательных к линиям сети Σ_n в точке A. Каждая из конструкций, позволяющих проективно инвариантно фиксировать положение точек A_i на соответствующих касательных, дает возможность нормализовать облась Ω.

Компоненты инфинитезимальных перемещений репера определяются из формул

$$dA = \omega_0^0 A + \omega^i A_i, \tag{1а}$$

$$dA_i = \omega_i^0 A + \omega_i^j A_j \qquad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{1б}$$

и удовлетворяют известным уравнениям структуры пространства P_n:

$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma\, \omega_\gamma^\beta] \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma = 0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ \omega_0^i = \omega^i). \tag{2}$$

Так как в каждой точке A прямые AA_i фиксированы (касательные к линиям данной сети в точке A) и положение вершин A_i на этих прямых выбрано, то 1 — формы ω_i^j $(i \neq j)$ и ω_i^0 — главные:

$$\omega_i^j = a_{ik}^j\, \omega^k, \quad \omega_i^0 = a_{ik}^0\, \omega^k \qquad (i \neq j). \tag{3}$$

Рассмотрим формы

$$\omega^i, \quad \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j\, \omega_0^0, \tag{4}$$

где δ_i^j — символ Кронекера. Пользуясь уравнениями (2), нетрудно убедиться, что эти формы удовлетворяют структурным уравнениям пространства аффинной связности:

$$D\omega^i = [\omega^j\, \overline{\omega}_j^k] + S_{jk}^i\, [\omega^j\, \omega^k],$$

$$D\overline{\omega}_i^j = [\overline{\omega}_i^k\, \overline{\omega}_k^j] + R_{ikt}^j\, [\omega^k\, \omega^t], \tag{5}$$

причем:

$$S_{jk}^i = 0, \tag{6}$$

$$R_{ikt}^j = 2\,(a_{i\,[k}^0\, \delta_{t]}^j - \delta_i^j\, a_{[kt]}^0). \tag{7}$$

Таким образом, формы (4) определяют на многообразии $\Omega \subset P_n$ аффинную связность ∇ без кручения, тензор кривизны этой связности дается формулами (7) (сравните [2], стр. 173).

Тензор Риччи

$$R_{ik} = R^j_{ikj} = n \cdot a^0_{ik} - a^0_{ki}. \tag{8}$$

Из (8) следует, что связность ∇ будет эквиаффинной только в том случае, когда объект a^0_{ij} симметричен [2]. Но симметричность объекта a^0_{ij} равносильна тому, что рассматриваемое соответствие $A \to P_{n-1}(A)$ является гармоническим [2]. Точку A можно так нормировать, что будет выполнено условие: $\omega^0_0 = 0$ и тогда по первой строке формул (1) находим:

$$A_i = \frac{\partial A}{\partial \omega^i}. \tag{9}$$

Значит, гармоническое соответствие $A \to P_{n-1}(A) = [A_1 \ \dots \ A_n]$ характеризуется тем, что найдется такое нормирование точки A, при котором выполняются соотношения (9) в репере, построенном на касательных к линиям ω^i данной сети.

Находим:

$$R_{(ik)} = (n-1)\, a^0_{(ik)}, \tag{10}$$

$$R_{ik}\, \omega^i \omega^k = (n-1) \cdot \varphi, \quad \varphi = a^0_{ik}\, \omega^i \omega^k. \tag{11}$$

Следовательно, конус $\varphi = 0$ совпадает с конусом Риччи связности ∇. Так как геометрический смысл формы φ известен [1], то в силу (11) становится известным и геометрический смысл квадратичной формы $R_{ik}\, \omega^i \omega^k$.

2. Направление в точке A можно задать отношением форм ω^i:

$$\omega^i = v^i \Theta.$$

Если точка A смещается в данном направлении, то формула (1a) примет вид:

$$dA = \omega^0_0 A + \Theta M,$$

где точка $M = v^i A_i$ – нормальная точка данного направления v^i [2].

Условие того, что направление v^i переносится параллельно вдоль кривой γ в некоторой аффинной связности, определяемой формами ω^i, ω^j_i, имеет, как известно, вид:

$$dv^i + v^k\, \omega^i_k = \vartheta v^i.$$

В рассматриваемом случае это условие принимает вид (2) стр. 214 монографии [2]:

$$dM = \mu A + \vartheta M, \tag{12}$$

и с точки зрения геометрии пространства P_n означает следующее.

Чтобы направление AM переносилось параллельно вдоль кривой $\gamma\,(\gamma \ni A)$ в связности ∇, необходимо и достаточно, чтобы прямые AM, взятые вдоль этой кривой, образовывали развертывающуюся поверхность, ребро возврата которой описывает нормальная точка M направления AM.

Пусть направление касательной к линии ω^i в точке A переносится параллельно вдоль линии ω^j (i, j фиксированы). Тогда условию (12) вдоль кривой ω^j удовлетворяет точка A_i и, следовательно,

$$a^k_{ij} = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \dots,\ n;\ k \neq i). \tag{13}$$

В частности, $a^j_{ij} = 0$ – точка A_i совпадает с псевдофокусом [1] F^j_i прямой AA_i.

Обратно, из (13) следует, что направление AA_i переносится параллельно вдоль ω^j. Поэтому справедлива

Теорема 1. *Равенства* (13) *выражают необходимое и достаточное условие того, чтобы направление AA_i переносилось параллельно вдоль линии ω^j в связности ∇.*

Если и направление AA_j переносится параллельно вдоль линии ω^i, то кроме (13) будут выполняться и соотношения

$$a^l_{ji}=0 \qquad (l=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ l\neq j). \tag{14}$$

Из (13) и (14) заключаем, что данная сеть Σ_n голономна в направлении $\{\omega^h\}$ $(h=1,\ \ldots,\ n;\ h\neq i,\ j)$, то-есть система уравнений $\omega^h=0$ вполне интегрируема и определяет в пространстве P_n $(n-2)$ — параметрическое семейство поверхностей V_2.

Заметим, что на каждой поверхности V_2 сеть $\{\omega^i,\ \omega^j\}$ сопряжена и точки A_i, A_j — фокусы касательных к линиям этой сопряженной сети.

Если линия ω^i — геодезическая в связности ∇, то условия (13) выполняются для $j=i$:

$$a^k_{ii}=0, \tag{15}$$

то-есть все формы $\omega^k_i\,(k\neq i)$ не зависят от ω^i и, следовательно, линия ω^i — прямая, что хорошо известно [2].

Если направление AA_i переносится параллельно вдоль любой другой линии сети, то равенства (13) имеют место для $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j\neq i$; все псевдофокусы F^j_i прямой AA_i совпадают между собой и, следовательно совпадают с гармоническим полюсом [1] F_i точки A относительно точек F^j_i Эта точка F_i и взята за вершину A_i репера.

3. Пусть в пространстве P_n задана сеть Σ_n. Мы назовем эту сеть проективно-чебышевской, если существует такая нормализация пространства P_n, что в соответствующей аффинной связности ∇ эта сеть окажется чебышевской, то-есть направление касательной к любой линии сети переносится параллельно вдоль любой другой линии этой сети ([2], стр. 336).

Из сказанного в $n^\circ 2$ следует, что проективно-чебышевская сеть в P_n есть n — сопряженная система с совпадающими фокусами на каждой из касательных к линиям сети. Ясно, что указанная в определении нормализация пространства P_n определяется заданной проективно-чебышевской сетью однозначно: нормализующая плоскость есть плоскость $[F_1\ \ldots\ F_n]$.

Наша сеть определяется системой дифференциальных уравнений:

$$\omega^k_i=a^k_{ii}\,\omega^i \qquad (k\neq i). \tag{16}$$

Замыкающая ее система квадратичных уравнений имеет вид:

$$[\Delta a^k_{ii}\,\omega^i]+[-\omega^0_i\,\omega^k]=0, \tag{17}$$

где

$$\Delta a^k_{ii}=da^k_{ii}-a^k_{ii}(2\overline{\omega}^i_i-\overline{\omega}^k_k)+a^j_{ii}\,\omega^k_j \qquad (j\neq i,\ k).$$

Систему (17) развернем по лемме Картана:

$$\Delta a^k_{ii}=\alpha^k_{ii}\,\omega^i-a^0_{ii}\,\omega^k,$$

$$\omega^0_i=a^0_{ii}\,\omega^i. \tag{18}$$

Нетрудно убедиться, что система уравнений (16, 17) не находится в инволюции и ее надо продолжать. Дифференцируя систему (18), где α^k_{ii}, a^0_{ii} — новые неизвестные функции, мы приходим к такой системе квадратичных уравнений:

$$[\Delta\alpha^k_{ii}\,\omega^i]+[\Delta a^0_{ii}\,\omega^k]=0, \qquad (19)$$

$$[\Delta a^0_{ii}\,\omega^i]=0, \qquad (20)$$

где

$$\Delta\alpha^k_{ii}=d\alpha^k_{ii}+\alpha^k_{ii}(\overline{\omega}^k_k-3\overline{\omega}^i_i)+\alpha^j_{ii}\,\omega^k_j-a^k_{ii}\,a^h_{ii}\,\omega^i_h,$$

$$\Delta a^0_{ii}=-da^0_{ii}+2a^0_{ii}\,\overline{\omega}^i_i-a^j_{ii}\,\omega^0_j. \qquad (20')$$

Систему (19, 20) можно рассматривать при фиксированном i. Тогда имеем n форм $\Delta\alpha^k$ и Δa^0_{ii} $(k\neq i)$ и столько же независимых квадратичных уравнений. Используя обычные в методе внешних форм обозначения, находим $S'_1=1$, $S'_2=0$ и, значит, $Q'=n$. Уравнения (19, 20) по лемме Картана дают:

$$\Delta\alpha^k_{ii}=\overline{\alpha}^k_{ii}\,\omega^i+\beta_{ii}\,\omega^k,$$

$$\Delta a^0_{ii}=\beta_{ii}\,\omega^i. \qquad (20'')$$

Здесь правые части содержат $N'=n$ параметров. Так как $N'=Q'$, то подсистема уравнений, полученная фиксацией индекса i в системе (19, 20) находится в инволюции. Придавая i значения $i=1, 2, \ldots, n$, заключаем, что и вся система (18—20) находится в инволюции и для нее старший характер $S_1=n^2$.

Следовательно, проективно-чебышевская сеть $\Sigma_n\subset P_n$ существует с произволом n^2 функций одного аргумента.

Из уравнений (16, 18) следует, что точка A_i неподвижна, когда точка A описывает гиперповерхность $\omega^i=0$ и, значит, *преобразование Лапласа проективно-чебышевской сети в P_n вдоль каждого из семейств ее линий состоит из одной линии.*

Если для такой сети нормализующая плоскость $\Pi_{n-1}(A)=[F_1\ \ldots\ F_n]$ остается неподвижной, когда точка A описывает сеть, то все формы ω^0_i тождественно равны нулю и, следовательно,

$$a^0_{ij}=0,\quad R^j_{ikl}=0,$$

геометрия связности ∇ есть геометрия аффинного пространства

$$A_n=P_n\backslash\Pi_{n-1}(A),$$

а данная сеть — чебышевская сеть этого пространства. Можно сказать, что чебышевская сеть в аффинном n-пространстве — это такая n-сопряженная система, у которой все фокусы каждой из касательных к линиям сети — несобственные.

В рассматриваемом случае система (17) примет вид:

$$[\Delta a^k_{ii}\,\omega^i]=0. \qquad (21)$$

Можно убедиться, что система уравнений (21) находится в инволюции и ее старший характер $S_1=n(n-1)$. Таким образом, чебышевская сеть в аффинном n-пространстве определяется с произволом $n(n-1)$ функций одного аргумента.

Заметим, что А. И. Чахтаури [3] дал другое обобщение понятия чебышевской сети на случай трехмерной сети $\Sigma_3\subset P_3$, отправляясь от некоторого аналога чебышевского вектора двумерной сети.

4. В каждой точке $A \in \Omega$ определен поляритет направлений относительно конуса Риччи связности ∇ или, что то же самое, относительно конуса $\varphi=0$ (мы предполагаем тензор $a^0_{(ij)}$ ненулевым). Чтобы этот поляритет сохранялся при перенесении направлений в связности ∇, тензор $a^0_{(ij)}$ должен, как известно, удовлетворять условию:

$$da^0_{(ij)} - a^0_{(kj)}\,\overline{\omega}^k_i - a^0_{(ik)}\,\overline{\omega}^k_j = \Theta a^0_{(ij)}, \tag{22}$$

где Θ — некоторая 1-форма.

Дифференцируя второе из уравнений (3), находим:

$$da^0_{ij} = a^0_{kj}\,\overline{\omega}^k_i + a^0_{ik}\,\overline{\omega}^k_j + a^0_{ijt}\,\omega^t \tag{23}$$

и условие (22) примет вид:

$$a^0_{(ij)\,t}\,\omega^t = a^0_{(ij)}\,\Theta.$$

Следовательно, Θ — главная форма. Полагая

$$\Theta = 2v_t\,\omega^t,$$

получим окончательно:

$$a^0_{(ij)\,t} = 2a^0_{(ij)}\,v_t$$

(ковектор v_t — дополнительный по А. П. Нордену [2]).

В общем случае нормализации пространства P_n, когда формы $\omega^k_i\,(i \neq k)$ не являются главными, мы имеем тензоры a^0_{ij}, a^0_{ijt}. Если же нормализация порождена заданной сетью $\Sigma_n \subset P_n$ и, значит, формы $\omega^k_i\,(i \neq k)$ — главные, то, как нетрудно проверить, каждый из объектов a^0_{ij}, a^0_{ijt} (i, j, t фиксированы) есть относительный инвариант.

Итак, для того, чтобы связность ∇, индуцированная в P_n нормализацией, порожденной сетью Σ_n, допускала угловую метрику с основным тензором $a^0_{(ij)}$, необходимо и достаточно, чтобы относительные инварианты a^0_{ij}, a^0_{ijt} этой сети удовлетворяли условию:

$$\text{ранг}\begin{pmatrix} a^0_{(ij)\,t} \\ a^0_{(ij)} \end{pmatrix} = 1$$

для любого $t = 1, 2, \ldots, n$. Если при этом матрица $(a^0_{(ij)})$ — невырожденная, то связность ∇ — вейлева. Наконец, связность ∇ будет римановой с основным тензором a^0_{ij}, если выполнены условия:

$$a^0_{ij} = a^0_{ji}, \quad \text{ранг}\,(a^0_{ij}) = n, \quad \text{ранг}\begin{pmatrix} a^0_{ijt} \\ a^0_{ij} \end{pmatrix} = 1 \tag{24}$$

для любого $t = 1, 2, \ldots, n$.

Последнее из условий (24) будет удовлетворено, если объект a^0_{ijt} равен нулю. Но обращение в нуль этого объекта [1] имеет следующий геометрический смысл: соответствие $A \to [A_1 \ldots A_n]$ есть поляритет в P_n относительно фиксированной гиперквадрики Q_{n-1}, которая в локальном репере $\{AA_i\}$ определяется уравнением: $a^0_{ij}x^i x^j - (x^0)^2 = 0$. Следовательно, конус $\varphi = 0$ проектирует из точки A квадрику $Q_{n-2} = Q_{n-1} \cap [A_1 \ldots A_n]$.

Так как при этом в силу (10) тензор Риччи $R_{ij} = (n-1)\,a^0_{ij}$ пропорционален метрическому тензору a^0_{ij}, то отсюда, как известно [4], следует, что при $n > 2$ кривизна римановой связности ∇ постоянна.

5. Пусть пространство P_n нормализовано семейством гиперплоскостей $P_{n-1}(A)$. Возьмем в P_n подвижной репер $\{AA_i\}$, где $A_i \in P_{n-1}(A)$. Мы получим формулы вида (1), где формы ω^0_i — главные:

$$\omega^0_i = a^0_{ij}\,\omega^j, \tag{25}$$

а формы ω_i^j могут зависеть и от дифференциалов вторичных параметров. Если вершины A_i заменить по формулам:

$$A_{i'} = C_{i'}^i A_i, \quad \det \| C_{i'}^i \| \neq 0, \tag{26}$$

то получим следующий закон преобразования наших форм:

$$\omega_{0'}^{0'} = \omega_0^0, \quad \omega^{i'} = C_i^{i'} \omega^i, \quad \omega_{i'}^0 = C_{i'}^i \omega_i^0,$$
$$\omega_{i'}^{k'} = C_j^{k'} (dC_{i'}^j + C_{i'}^i \omega_i^j). \tag{27}$$

Отсюда следует, что ранг системы форм $\{\omega_i^0\}$ не меняется при преобразовании (26) и всецело определяется самой нормализацией $A \to P_{n-1}(A)$. Этот ранг можно назвать рангом данной нормализации.

Пусть ранг $\{\omega_i^0\} = \rho < n$. Для определенности будем считать формы $\omega_{i_1}^0$ $(i_1, j_1 = 1, \ldots, \rho)$ линейно независимыми, а формы $\omega_{i_2}^0$ $(i_2, j_2 = \rho + 1, \ldots, n)$ — их линейными комбинациями:

$$\omega_{i_2}^0 = \lambda_{i_2}^{i_1} \omega_{i_1}^0. \tag{28}$$

В каждой точке $A \in P_n$ определяется „особое“ $(n-\rho)$-направление $\Pi_{n-\rho}(A)$, образованное всеми особыми 1-направлениями, для которых $\omega_{i_1}^0 = 0$. Если смещение точки A: $dA \in \Pi_{n-\rho}(A)$, то по (28) $\omega_{i_2}^0 = 0$ и, значит, плоскость $P_{n-1}(A)$ неподвижна. Таким образом, ранг нормализации характеризует степень подвижности нормализующей плоскости $P_{n-1}(A)$ при перемещениях точки A.

Нетрудно заметить, что при условии (28) система

$$\omega_{i_1}^0 = 0 \tag{29}$$

вполне интегрируема и определяет в P_n ρ-параметрическое семейство поверхностей $V_{n-\rho}$. Поверхность $V_{n-\rho}$ в каждой своей точке A касается особого направления $\Pi_{n-\rho}(A)$. Нормализующая плоскость $P_{n-1}(A)$ неподвижна, когда точка A описывает поверхность $V_{n-\rho}$.

Из сказанного следует, что ранг ρ нормализации

$$A \to P_{n-1}(A) \tag{30}$$

в точности равен числу параметров, от которых существенно зависит семейство $\{P_{n-1}(A)\}$ нормализующих плоскостей. Соответствие (30) будет взаимно однозначным в некоторой области $\Omega \subset P_n$ тогда и только тогда, когда в этой области ранг нормализации максимальный: $\rho = n$.

Если направление AA_{j_2} принадлежит направлению $\Pi_{n-\rho}(A)$, то система (29) должна удовлетворяться при $\omega^i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j_2)$. Учитывая систему (28) находим, что

$$a_{kj_2}^0 = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{31}$$

Обратно, из (31) следует: $AA_{j_2} \subset \Pi_{n-\rho}(A)$. Мы пришли к такому утверждению:

Теорема 2. *Для того, чтобы направление AA_t было особым относительно нормализации* (30), *необходимо и достаточно, чтобы формы ω_k^0 не зависели от формы ω^t.*

Замечание. Если нормализация инвариантно связана с сетью Σ_n и имеет ранг $\rho < n$, то мы можем проективно различать сети, у которых $1, 2, \ldots, n-\rho$ направлений сети принадлежат особому $(n-\rho)$-направлению данной нормализации.

Рассмотрим один частный случай. Пусть $(n-\rho)$-направление $\Pi_{n-\rho}(A)$, натянутое на 1-направления ω^{i_2} $(i_2=\rho+1, \ldots, n)$ является особым направлением данной нормализации. В силу (31) формы

$$\omega_i^0=a_{ii_1}^0\,\omega^{i_1} \qquad (a_{ii_2}^0=0)$$

выражаются только через формы ω^{i_1}. Если нормализация гармоническая, то $a_{i_2 i}^0=0$ и все формы $\omega_{i_2}^0$ тождественно равны нулю

$$\omega_{i_2}^0=0.$$

Дифференцируя эти уравнения внешним образом, получим:

$$\omega_{i_2}^{i_1}=a_{i_2 j_1}^{i_1}\,\omega^{j_1}.$$

Пусть точка A описывает поверхность $V_{n-\rho}$ $(\omega^{i_1}=0)$, касающуюся в каждой своей точке A особого направления $\Pi_{n-\rho}(A)$. Тогда

$$\omega_{i_2}^{i_1}=0.$$

Следовательно, поверхность $V_{n-\rho}$ является плоскостью. Доказана

Теорема 3. *Если поле $(n-\rho)$-направлений, натянутых на касательные к линиям ω^{i_2} сети $\Sigma_n\subset P_n$ является полем особых направлений гармонической нормализации ранга ρ пространства, то сеть Σ_n расслаивается в ρ-направлении $\{\omega^{i_1}\}$ на ∞^ρ плоских сетей $\Sigma_{n-\rho}$ из линий ω^{i_2}.*

6. При заданной нормализации в каждой точке $A\in P_n$ определен конус направлений $\varphi=0$. Ясно, что особое $(n-\rho)$-направление $\Pi_{n-\rho}(A)$ принадлежит этому конусу. Если произвести замену вершин репера:

$$\bar{A}_{i_1}=A_{i_1}, \quad \bar{A}_{i_2}=-\lambda_{i_2}^{i_1}A_{i_1}+A_{i_2},$$

то линейную зависимость форм (28) приведем к виду (возвращаясь к прежнему обозначению)

$$\omega_{i_2}^0=0. \tag{32}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (32) и применяя лемму Картана, получим:

$$\omega_{i_2}^{i_1}=\mu_{i_2}^{i_1 j_1}\,\omega_{j_1}^0. \tag{*}$$

Таким образом, при любом смещении точки A в особом направлении $\Pi_{n-\rho}(A)$ $(\omega_{j_1}^0=0)$ имеем:

$$dA_{i_2}=\omega_{i_2}^{j_2}A_{j_2}.$$

Значит, когда точка A описывает поверхность $V_{n-\rho}$ (n^0 5), то неподвижна не только гиперплоскость $[A_1 \ldots A_n]$, но и плоскость

$$P_{n-\rho-1}=[A_{\rho+1} \ldots A_n]. \tag{33}$$

Имеем

$$\omega_{i_1}^0=a_{i_1 j_1}^0\,\omega^{j_1}+a_{i_1 j_2}^0\,\omega^{j_2}. \tag{34}$$

При преобразованиях (26), сохраняющих (32), мы получим:

$$\omega_{i_1'}^0=C_{i_1'}^{i_1}\,\omega_{i_1}^0$$

и так как ранг системы форм $\omega_{i_1'}^0$ должен быть равен ρ (как и ранг системы $\omega_{i_1}^0$), то матрица $(C_{i_1'}^{i_1})$ – невырожденная. Следовательно, при указанных преобразованиях ранг матрицы $(a_{i_1 j_2}^0)$ в разложении (34) сохраняется.

Пусть

$$\Pi_{n-\rho}(A)\cap P_{n-\rho-1}=P_r \qquad (0\leqslant r\leqslant n-\rho-1). \tag{35}$$

Вершины $A_{\hat{i}_2}(\hat{i}_2, \hat{j}_2 = \rho+1, \ldots, \rho+r+1)$ поместим в плоскости P_r. Это достигается преобразованиями вида:

$$A_{i_2'} = C_{i_2'}^{i_2} A_{i_2}, \tag{36}$$

которые сохраняют соотношения (32). Теперь каждое из направлений $AA_{\hat{i}_2}$ является особым. По теореме 2 формы $\omega_{i_1}^0$ не зависят от форм $\omega^{\hat{i}_2}$. Если

$$\text{ранг } (a_{i_1 j_2}^0) = \rho_1 < n - \rho,$$

то среди $n-\rho$ столбцов матрицы $(a_{i_1 j_2}^0)$ содержится ρ_1 линейно независимых и $r+1$ столбцов, которые можно сделать нулевыми преобразованиями вида (36). Значит, $\rho_1 \leqslant n - \rho - r - 1$ и мы получаем следующее соотношение для размерности пересечения (35):

$$r \leqslant n - \rho - \rho_1 - 1.$$

Мы пришли к такому утверждению:

Теорема 4. *Пусть в пространстве P_n заданы:* а) ρ *— параметрическое семейство* $(\rho < n)$ *поверхностей* $V_{n-\rho} = V_{n-\rho}(u^1, \ldots, u^\rho)$, б) ρ *— параметрическое семейство гиперплоскостей* $P_{n-1}(v^1, \ldots, v^\rho)$, в) *любое дифференцируемое отображение*

$$v^{i_1} = v^{i_1}(u^1, \ldots, u^\rho) \tag{37}$$

одного семейства на другое. Чтобы получить нормализацию ранга ρ пространства P_n, достаточно любой точке A

$$A \in V_{n-\rho}(u), \quad A \notin V_{n-\rho}(u) \cap P_{n-1}\big(v(u)\big)$$

поставить в соответствие гиперплоскость $P_{n-1}\big(v(u)\big)$. Любая нормализация ранга ρ может быть получена этим способом.

При этом в каждой гиперплоскости $P_{n-1}\big(v(u)\big)$ выделяется автоматически $(n-\rho-1)$-плоскость $P_{n-\rho-1}(u)$. Плоскости $P_{n-1}\big(v(u)\big)$ и $P_{n-\rho-1}(u)$ остаются неподвижными, когда точка A описывает поверхность $V_{n-\rho}(u)$. Нетрудно указать геометрический закон отыскания плоскости $P_{n-\rho-1}(u)$.

Возьмем точку

$$M = x^i A_i \in P_{n-1}\big(v(u)\big).$$

При произвольном смещении нашей гиперплоскости внутри семейства $\{P_{n-1}(v)\}$ имеем:

$$dM = x^i \omega_i^0 A + (dx^i + x^j \omega_j^i) A_i.$$

Учитывая (32), заключаем, что если $M \in P_{n-\rho-1}(u)$ $(x^{i_1} = 0)$, то $dM \in P_{n-1}(v)$ при любом бесконечно малом смещении гиперплоскости $P_{n-1}(v)$ внутри семейства. Таким образом, $P_{n-\rho-1}(u)$ есть плоская образующая гиперповерхности V_{n-1} — огибающей семейства гиперплоскостей $\{P_{n-1}(v)\}$. Гиперплоскость $P_{n-1}(v)$ касается гиперповерхности V_{n-1} вдоль образующей $P_{n-\rho-1}(u)$. Следовательно, V_{n-1} — гиперповерхность ранга ρ. Вместо семейства гиперплоскостей $P_{n-1}(v)$ мы можем задать в P_n гиперповерхность V_{n-1} ранга ρ и рассматривать (37) как отображение семейства поверхностей $V_{n-\rho}(u)$ на $(n-\rho-1)$-мерные образующие поверхности V_{n-1}.

Мы получаем следующий закон построения нормализации ранга ρ пространства P_n: *для точки A ищем поверхность $V_{n-\rho}(u) \ni A$ в данном* *семействе* $\{V_{n-\rho}(u)\}$. *Затем находим соответствующую этой поверхности в отображении* (37) *образующую* $P_{n-\rho-1}(u)$ *гиперповерхности* V_{n-1} *и гиперплоскость* $P_{n-1}(u)$, *касательную к поверхности* V_{n-1} *вдоль этой образующей. Тогда гиперплоскость* $P_{n-1}(u)$ *соответствует точке* A *в рассматриваемой нормализации.*

Если размерность пересечения (35) максимальная: $r=n-\rho-1$, то $\rho_1=0$. Тогда по (34)

$$\omega_{i_1}^0=a_{i_1 j_1}^0\,\omega^{j_1}$$

и по (*) заключаем, что поверхность $V_{n-\rho}$ есть $(n-\rho)$-плоскость, которая, очевидно, проходит через $P_{n-\rho-1}(u)$. Отсюда

Теорема 5. *Размерность пересечения* (35) *будет максимальной* $r=n-\rho-1$ *только в том случае, когда каждая из поверхностей* $V_{n-\rho}(u)$ *есть* $(n-\rho)$*-плоскость, проходящая через соответствующую ей образующую* $P_{n-\rho-1}(u)$ *поверхности* V_{n-1}.

Пусть дана сеть $\Sigma_n\subset P_n$. Как отмечалось в n^0 1, мы можем получить нормализации пространства P_n с помощью определенных геометрических конструкций, связанных с этой сетью (например, беря в качестве точек A_i те или иные из псевдофокусов F_i^j, касательных к линиям сети, или гармонические полюсы F_i точки A относительно этих псевдофокусов). Следовательно, мы можем классифицировать сети $\Sigma_n\subset P_n$ по рангам ρ нормализаций, порожденных теми или иными из указанных конструкций, и по размерности r пересечения (35).

Москва

Поступило в редакцию
13.XII.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Т. Базылев, К геометрии плоских многомерных сетей, Ученые записки Мос. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина, Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии, М., 1965, 29–37.
2. А. П. Норден, Пространства аффинной связности, ГИТТЛ, М., 1950.
3. А. И. Чахтаури, Об одной конфигурации, связанной с трехмерной сетью, Тезисы докладов Второй Всесоюзной геометрической конференции, Харьковский университет, Харьков, 1964, 307–310.
4. К. Яно и С. Бохнер, Кривизна и числа Бетти, Изд. иностр. литер., М., 1957.

PROJEKTYVINĖS ERDVĖS NORMALIZACIJŲ, GAUNAMŲ IŠ DUOTO JOJE TINKLO, KLAUSIMU

V. T. BAZYLEVAS

(Reziumė)

Projektyvinėje n-matėje erdvėje n-audinį vadiname tinklu. Nagrinėjamos normalizacijos (A. P. Nordeno prasme), kurias galima invariantiškai sujungti su duotuoju tinklu. Normalizacijos rangu vadiname skaičių esminių parametrų, nuo kurių priklauso normalizuojančių plokštumų šeima. Duota normalizacijos rango $\rho<n$ geometrinė konstrukcija. Daugiamačius tinklus galima klasifikuoti pagal normalizacijų, invariantiškai sujungtų su šiais tinklais, rangus.

SUR LES NORMALISATIONS D'UN ESPACE PROJECTIF ENGENDRÉES PAR UN RÉSEAU DONNÉ DANS CET ESPACE

V. T. BASILEV

(*Résumé*)

Un n-tissu de courbes dans un espace projectif à n dimensions est appelé réseau. On étudie des normalisations (au sens de Norden) de l'espace qui peuvent être attachées invariablement au réseau donné.

Le rang de la normalisation caractérise la mobilité du hyperplan normalisant. On donne la construction géométrique de la normalisation de rang $\rho < n$.