1966

О КОМПОЗИЦИИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

В. П. ПОПОВ

Пусть

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z} \tag{1}$$

$$g(z)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\lambda_k z}, \tag{2}$$

где $\{\lambda_k\}$ – последовательность комплексных чисел, для которой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|}=\tau<\infty. \tag{3}$$

Всюду под функциями $f(z)$ и $g(z)$ будем понимать ряды (1), (2), сходящиеся, соответственно, в областях G_f и G_g и аналитически продолженные.

Пусть $L(z)$ – целая функция экспоненциального типа, для которой

$$L(-\lambda_n)=0,\ L'(-\lambda_n)\neq 0 \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{4}$$

Обозначим через $\gamma(t)$ функцию, ассоциированную по Борелю с функцией $L(z)$, и через D – сопряженную диаграмму $L(z)$. Пусть I_ε – контур, внутри которого находится область D, причем расстояние точек на I_ε от границы области D не меньше, чем ε $(\varepsilon>0)$.

§ 1. Формула для определения коэффициентов ряда Дирихле

Формула, о которой будет идти речь, была впервые предложена А. Ф. Леонтьевым [1] при изучении достаточных условий разложимости аналитической функции в ряд Дирихле. Покажем, что эта формула (в несколь ко обобщенной форме) справедлива для функций, заданных рядами Дирихле. При этом нет необходимости накладывать на $L(z)$ некоторые из дополнительных ограничений, о которых идет речь в [1].

Рассмотрим функцию $f(z)$. Пусть области G_f и D удовлетворяют условию (А): существуют такие точки z_0 и a, что $z_0+\xi-\eta\in G_f$, где η – любая точка отрезка $[a;\ \xi]$, а ξ пробегает контур I_ε.

Покажем, что при сделанных предположениях коэффициенты ряда (1) можно вычислять по формулам

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{I_\varepsilon}\left[\int_a^{\xi} f(z_0+\xi-\eta)\,\frac{e^{-\lambda_n(\eta-z_0)}}{L'(-\lambda_n)}\,d\eta\right]\gamma(\xi)\,d\eta. \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{5}$$

Так как $z_0+\xi-\eta\in G_f$, когда $\eta\in[a;\ \xi]$, то ряд (1) для функции $f(z_0+\xi-\eta)$ после умножения на $e^{-\lambda_n(\eta-z_0)}$ при фиксированном n можно почленно проинтегрировать по η. Получим

$$\sum_{k\neq n} a_k \int\limits_a^{\xi} e^{-\lambda_k(z_0+\xi-\eta)-\lambda_n(\eta-z_0)}\,d\eta+a_n\int\limits_a^{\xi} e^{-\lambda_n\xi}\,d\eta=$$

$$=\sum_{k\neq n} a_k e^{-\lambda_k(z_0+\xi)+\lambda_n z_0}\int\limits_a^{\xi} e^{(\lambda_k-\lambda_n)\eta}\,d\eta+a_n(\xi-a)e^{-\lambda_n\xi}=$$

$$=e^{\lambda_n(z_0-\xi)}\sum_{k\neq n}\frac{a_k}{\lambda_k-\lambda_n}e^{-\lambda_k z_0}-e^{\lambda_n(z_0-a)}\sum_{k\neq n}\frac{a_k}{\lambda_k-\lambda_n}e^{-\lambda_k(z_0+\xi-a)}+$$

$$+a_n\xi e^{-\lambda_n\xi}-a_n a e^{-\lambda_n\xi}.$$

Так как из условия (A) следует, что $z_0\in G_f$, то первая сумма есть число, а в силу условия (A) второй ряд сходится равномерно по ξ на I_ε, следовательно, этот ряд после умножения на $\gamma(\xi)$ можно проинтегрировать почленно вдоль I_ε.

Имеем

$$\sum_{k\neq n}\frac{a_k}{\lambda_k-\lambda_n}e^{-\lambda_k z_0}\frac{e^{\lambda_n z_0}}{2\pi i}\int\limits_{I_\varepsilon} e^{-\lambda_n\xi}\gamma(\xi)\,d\xi-$$

$$-e^{\lambda_n(z_0-a)}\sum_{k\neq n}\frac{a_k e^{-\lambda_k(z_0-a)}}{\lambda_k-\lambda_n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{I_\varepsilon} e^{-\lambda_k\xi}\gamma(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{a_n}{2\pi i}\int\limits_{I_\varepsilon}\xi e^{-\lambda_n\xi}\gamma(\xi)\,d\xi-\frac{a_n a}{2\pi i}\int\limits_{I_\varepsilon} e^{-\lambda_n\xi}\gamma(\xi)\,d\xi.$$

Из формулы обращения и свойства (4) функции $L(z)$ следует, что интегралы под знаками сумм и последний интеграл обращаются в нуль, а оставшийся интеграл равен $L'(-\lambda_n)$, откуда и следует справедливость формулы (5).

Если $L'(-\lambda_n)=1$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, то формула для коэффициентов примет вид

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{I_\varepsilon}\left[\int\limits_a^{\xi} f(z_0+\xi-\eta)e^{-\lambda_n(\eta-z_0)}\,d\eta\right]\gamma(\xi)\,d\xi. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию $\bar L(t)=e^{cz}L(z)$. Ясно, что

$$\bar L(-\lambda_n)=0\ (n=1,\ 2,\ \ldots)\ \text{и}\ \bar L'(-\lambda_n)=e^{-\lambda_n c}\cdot L'(-\lambda_n).$$

Обозначим через $\gamma_c(t)$ функцию, ассоциированную по Борелю с $\bar L(z)$. Известно, что сопряженная диаграмма D_c функции $\bar L(z)$ получается сдвигом D на вектор $\bar c$, и, следовательно, соответственно сдвигается и контур I_ε. Обозначим его через $I_\varepsilon(c)$. Наконец, если $a=0$, то получаем следующие формулы:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{I_\varepsilon(c)}\left[\int\limits_0^{\xi} f(z_0+\xi-\eta)\frac{e^{-\lambda_n(\eta-z_0-c)}}{L'(-\lambda_n)}\,d\eta\right]\gamma_c(\xi)\,d\xi$$

и

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{I_\varepsilon(c)}\left[\int\limits_0^{\xi} f(z_0+\xi-\eta)e^{-\lambda_n(\eta-z_0-c)}\,d\eta\right]\gamma_c(\xi)\,d\xi.$$

§ 2. Теоремы о композиции рядов Дирихле

Используя формулы для коэффициентов ряда Дирихле, переходим к рассмотрению композиционного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n L'(-\lambda_n) e^{-\lambda_n z} \tag{7}$$

относительно функций $f(z)$, $g(z)$ заданных рядами (1), (2) и целой функции $L(z)$, удовлетворяющей условию (4). Предполагается, что последовательность $\{|\lambda_n|\}$ удовлетворяет условию (3), а последовательность $\{\arg\lambda_n\}$ – произвольная.

Пусть области G_g и D удовлетворяют условию (B): существуют a и z_1 такие, что $z_1+\eta\in G_g$, когда η изменяется вдоль отрезка $[a;\ \xi]$, где $\xi\in I_\varepsilon$.

Условие (A) на области G_f и D остается в силе. Легко видеть, что каждое из этих условий выполнено при некоторых a, z_0, z_1, если область D после сдвига можно вложить в каждую из областей G_f и G_g.

Рассмотрим функцию

$$H(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{I_\varepsilon}\left[\int_a^{\xi} f(z_0+\xi-\eta)\,g(z-z_0+\eta)\,d\eta\right]\gamma(\xi)\,d\xi. \tag{8}$$

Обозначим через $\Delta(a)$ выпуклую оболочку точки a и контура I_ε. Тогда множество точек η отрезков вида $[a;\ \xi]$, где ξ пробегает I_ε, принадлежит $\Delta(a)$, а множество соответствующих точек $\xi-\eta$ принадлежит $\Delta'(a)$, где $\Delta'(a)$ – область, полученная из $\Delta(a)$ сдвигом на вектор $(-a)$.

В дальнейшем под символами $\Delta(a)$ и $\Delta'(a)$ будем понимать как сами области, так и произвольные точки, принадлежащие этим областям. Символами z_0, z_1 будут обозначаться не только точки, но и соответствующие одноточечные множества.

В силу условия (A) для областей G_f и D и условия (B) для областей G_g и D существуют такие a, z_0, z_1, что

$$z_0+\xi-\eta=z_0+\Delta'(a)\in G_f$$

и

$$z_1+\eta=z_1+\Delta(a)\in G_g.$$

При данном a множество значений z_0, для которых выполняется предыдущее, обозначим через $G_f(\Delta')$ и соответствующее множество значений z_1 – через $G_g(\Delta)$. Образуем множество $G_H(a)=G_f(\Delta')+G_g(\Delta)$ как сумму всевозможных точек z_0+z_1, где $z_0\in G_f(\Delta')$, а $z_1\in G_g(\Delta)$.

Покажем, что функция $H(z)$ совпадает с рядом (7) для всех $z\in G_H(a)$. Для всех $z\in G_H(a)$, как это следует из условия (B), функция $g(z-z_0+\eta)$ есть сумма соответствующего ряда Дирихле, а функция $f(z_0+\xi-\eta)$ голоморфна для всех $\xi\in I_\varepsilon$ и $\eta\in[a;\ \xi]$. Поэтому, подставив вместо функции $g(z-z_0+\eta)$ соответствующий ряд и умножив его почленно на $f(z_0+\xi-\eta)$, можно его почленно проинтегрировать по η:

$$\int_a^{\xi} f(z_0+\xi-\eta)\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n(z-z_0+\eta)}\,d\eta=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_a^{\xi} f(z_0+\xi-\eta)\,e^{-\lambda_n(z-z_0+\eta)}\,d\eta. \tag{9}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_n(\xi)=\int\limits_a^{\xi} f(z_0+\xi-\eta)\,e^{-\lambda_n(z-z_0+\eta)}\,d\eta,$$

где

$$z\in G_H(a),\ \ \xi\in I_\varepsilon,\ \ \text{а}\ \ \xi\in[a;\ \xi].$$

Оценим ее:

$$|\Phi_n(\xi)|\leqslant|\xi-a|\,M_f\max_{\eta\in[a;\ \xi]}|e^{-\lambda_n(z-z_0+\eta)}|,$$

где

$$M_f=\max_{\xi-\eta\in\Delta'(a)}|f(z_0+\xi-\eta)|.$$

Но $|\xi-a|$ при фиксированном a и $\xi\in I_\varepsilon$ не превосходит максимального расстояния d точки a до контура I_ε, т. е.

$$|\xi-a|\leqslant d.$$

Рассмотрим

$$\max_{\eta\in[a;\ \xi]}|e^{-\lambda_n(z-z_0+\eta)}|=\max_{\eta\in[a;\ \xi]}|e^{-\lambda_n(z-z_0+\eta-a)}|\,|e^{-\lambda_n a}|=$$

$$=|e^{-\lambda_n(z-z_0+a)}|\max_{\eta\in[a;\ \xi]}|e^{-\lambda_n(\eta-a)}|.$$

Но

$$\arg(\eta-a)=\arg(\xi-a),$$

а потому

$$m_n(\xi)=\max_{\eta\in[a;\ \xi]}|e^{-\lambda_n(\eta-a)}|=\begin{cases}1, & \text{если } \cos\Theta_n\geqslant 0\\ |e^{-\lambda_n(\xi-a)}|, & \text{если } \cos\Theta_n<0,\end{cases}$$

где

$$\Theta_n=\arg\lambda_n+\arg(\eta-a).$$

Окончательно

$$|\Phi_n(\xi)|\leqslant M_f d\,|e^{-\lambda_n(z-z_0+a)}|\,m_n(\xi).$$

Теперь ряд в правой части (9) мажорируется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_f\cdot d\,|b_n|\,|e^{-\lambda_n(z-z_0+a)}|\,m_n(\xi), \tag{9'}$$

причем

$$|e^{-\lambda_n(z-z_0+a)}|\,m_n(\xi)=\begin{cases}|e^{-\lambda_n(z-z_0+a)}|, & \text{если } \cos\Theta_n\geqslant 0\\ |e^{-\lambda_n(z-z_0+\xi)}|, & \text{если } \cos\Theta_n<0.\end{cases}$$

Разбивая ряд (9) на два с учетом знаков $\cos\Theta_n$

$$\sum{}'\,|b_n|\,dM_f|\,e^{-\lambda_n(z-z_0+a)}+\sum{}''\,|b_n|\,dM_f|\,e^{-\lambda_n(z-z_0+\xi)}|,$$

получаем, что он сходится равномерно по $\xi\in I_\varepsilon$ для всех $z\in G_H(a)$. Это следует из построения области $G_H(a)$. Итак, ряд (9) можно почленно проинтегрировать по ξ:

$$H(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{I_\varepsilon}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n z}\int\limits_a^{\xi} f(z_0+\xi-\eta)\,e^{-\lambda_n(\eta-z_0)}\,d\eta\Big]\gamma(\xi)\,d\xi=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n z}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{I_\varepsilon}\Big[\int\limits_a^{\xi} f(z_0+\xi-\eta)\,e^{-\lambda_n(\eta-z_0)}\,d\eta\Big]\gamma(\xi)\,d\xi=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n L'(-\lambda_n)\,e^{-\lambda_n z},$$

что следует из формулы для коэффициентов ряда Дирихле функции $f(z)$. Итак, доказано, что для всех $z \in G_H(a)$ функция $H(z)$ совпадает с рядом (7).

Будем продолжать функцию $H(z)$ из области $G_H(a)$. Каждому фиксированному a соответствуют области $\Delta(a)$ и $\Delta'(a)$, которые совпадают с точностью до параллельного переноса. Воспользуемся тем, что в области $G_H(a)$ функция $H(z)$ не зависит от z_0. Поэтому функция $H(z)$ не зависит от z_0 и в любой области, куда ее можно аналитически продолжить, как функцию от z_0.

Выберем наибольшие области Γ_f и Γ_g, принадлежащие, соответственно, областям голоморфности функций $f(z)$, $g(z)$ и имеющие общие точки, соответственно, с областями $G_f(\Delta')$, $G_g(\Delta)$, точки которых обладают следующим свойством: если $z_0 \in \Gamma_f$ и $z_1 \in \Gamma_g$, то $z_0 + \Delta'(a)$ и $z_1 + \Delta(a)$ принадлежат, соответственно, областям голоморфности функций $f(z)$, $g(z)$ (Γ_f и Γ_g расположены, вообще говоря, на соответствующих римановых поверхностях). Другими словами, при изменении точек z_0 и z_1, соответственно, по областям Γ_f, Γ_g сопровождающие их области $z_0 + \Delta'(a)$ и $z_1 + \Delta(a)$ не покрывают особых точек, соответственно, функций $f(z)$, $g(z)$.

Выберем произвольную точку $z_1 \in \Gamma_g$ и пусть z_0 изменяется в области Γ_f. Тогда для выбранных z_0 и z_1 функции $f(z_0 + \xi - \eta)$ и $g(z - z_0 + \eta)$ голоморфны по η и по ξ для всех $z = z_0 + z_1$, где z_0 пробегает область Γ_f, а z_1 – фиксированная точка, принадлежащая области Γ_g.

Следовательно, функция $H(z)$ будет голоморфной по z для всех z, принадлежащих сумме областей $\Gamma_H(z_1) = \Gamma_f + z_1$ (под суммой понимается множество точек вида $z_0 + z_1$, где $z_0 \in \Gamma_f$). А так как Γ_f имеет общие точки с $G_f(\Delta')$, то для этих точек и фиксированной точки z_1 функция $H(z)$ представима рядом (7). Итак, мы получили аналитическое продолжение функции $H(z)$ из области $G_H(a)$, где сходится ряд (7), в область $\Gamma_H(z_1)$. Так как точка z_1 – произвольная точка, принадлежащая области Γ_g, то отсюда следует, что функция $H(z)$ аналитически продолжима в область $\Gamma_H(a) = \Gamma_f + \Gamma_g$.

Таким образом, для фиксированного значения a функция $H(z)$ аналитически продолжима в область $\Gamma_H(a)$. Рассмотрим множество M значений a, для которых имеет место предыдущее. Тогда функция $H(z)$ аналитически продолжима для каждого $a \in M$ в область $\Gamma_H(a)$. Следовательно, функция $H(z)$ аналитически продолжима и в объединение этих областей. Обозначим его через

$$\Gamma_H = \bigcup_{a \in M} \Gamma_H(a).$$

(Эта область расположена на римановой поверхности.)

Таким образом, доказана следующая

Теорема: *Пусть* $f(z)$ *и* $g(z)$ *заданы рядами* (1), (2), *причем области сходимости этих рядов удовлетворяют условиям* (A) *и* (B). *Пусть* $L(z)$ – *целая функция экспоненциального типа, для которой*

$$L(-\lambda_n) = 0, \ L'(-\lambda_n) \neq 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда функция

$$H(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n L'(-\lambda_n)\, e^{-\lambda_n z}$$

аналитически продолжима в область Γ_H.

Замечание 1. В формулировке доказанной теоремы можно, очевидно, поменять ролями $f(z)$ и $g(z)$, так как при этом ряд (7) не изменится.

Замечание 2. Если последовательность $\{\arg\lambda_n\}$ заключена в угле Θ раствора меньшего π, то области G_f и G_g содержат внутри себя угол раствора $\pi-\Theta$. Следовательно, в этом случае условиям (A) и (B) можно удовлетворить всегда.

Замечание 3. Если известны особые точки функции $\gamma(t)$, то при построении областей $\Gamma_H(a)$ можно контур l_ε заменить контуром l_ε^*, построенным следующим образом.

Берется наименьшее звездное относительно точки a множество S_a, содержащее все особые точки функции $\gamma(t)$ и l_ε^* — звездный относительно точки a замкнутый контур, точки которого отстоят от S_a на расстояниях, не меньших $\varepsilon\,(\varepsilon>0)$.

Рассмотрим, наконец, функцию

$$g_L(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{L'(-\lambda_n)}\, e^{-\lambda_n z}.$$

Пусть

$$\delta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\left|\frac{1}{L'(-\lambda_n)}\right|<\infty \tag{10}$$

и, кроме того, область сходимости ряда для $g_L(z)$ такова, что условие типа (B) относительно этой области и области D имеет место.

Обозначим последовательность $\left\{\frac{1}{L'(-\lambda_n)}\right\}\equiv\{c_n\}$.

Как известно [2], в силу условия (10) можно построить целую функцию экспоненциального типа $\varphi(z)$, для которой

$$\varphi(-\lambda_n)=c_n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Получим

$$g_L(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\varphi(-\lambda_n)\, e^{-\lambda_n z}.$$

Пусть известны особенности функции $\psi(t)$, ассоциированной по Борелю с целой функцией $\varphi(z)$. Обозначим множество особых точек функций $g(z)$ и $\psi(t)$, соответственно, через S_g и S_ψ (включив в эти множества точки соответствующих разрезов, если функции $g(z)$ и $\psi(t)$ не однозначны).

Применяя теорему типа Крамера*) к функции

$$g_L(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\varphi(-\lambda_n)\, e^{-\lambda_n z},$$

---

*) В случае, когда $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел, эта теорема сформулирована и доказана в [3]. Очевидно, что она справедлива и в случае, когда $\{\lambda_n\}$ — комплексные числа.

получаем, что особые точки функции $g_L(z)$ содержатся среди точек вида $\beta+\tilde{\gamma}$, где $\beta \in S_g$, а $\tilde{\gamma} \in S_\psi$.

Применяя доказанную теорему к функциям f и g_L, получим аналитическое продолжение функции

$$H(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{-\lambda_n z},$$

т. е. композиционного ряда типа Адамара по отношению к функциям f и g.

Москва

Поступило в редакцию
21.II.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Леонтьев, О представлении произвольных функций рядами Дирихле, ДАН СССР, т. 164, № 1 (1965).
2. А. Ф. Леонтьев, Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка нормального типа, ДАН СССР, т. 66, № 2 (1949), 153–156.
3. V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.

DIRICHLE EILUČIŲ SU KOMPLEKSINIAIS RODIKLIAIS KOMPOZICIJOS KLAUSIMU

V. POPOVAS

(Reziumė)

Tegul Dirichle eilučių

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \quad \text{ir} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n z}$$

rodikliai λ_n yra kompleksiniai skaičiai, patenkinantieji sąlygą

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty,$$

o $L(z)$ yra sveika eksponencialinė funkcija, kuri turi paprastus nulius taškuose $-\lambda_n$.

Darbe nagrinėjama kompozicinė eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n L'(-\lambda_n) e^{-\lambda_n z}$$

ir įrodoma teorema apie šios eilutės sumos analizinį pratęsimą.

SUR LA COMPOSITION DES SÉRIES DE DIRICHLET AVEC LES EXPOSANTS COMPLEXES

V. POPOV

(Résumé)

On considère une série

$$H(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n L'(-\lambda_n) e^{-\lambda_n z},$$

où

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \quad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n z}$$

et $L(z)$ est une fonction entière pour laquelle $L(-\lambda_n)=0$, $L'(-\lambda_n)\neq 0$, $(n=1, 2, 3, \ldots)$, $\overline{\lim}\,(n:|\lambda_n|)<\infty$. On demontre qu'on peut prolonger analytiquement la fonction $H(z)$ dans un domaine Γ_H qui dépend de points singuliers des fonctions $f(z)$, $g(z)$, $L(z)$.