VI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1966

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ РЕШЕТЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. А. МИТАЛАУСКАС, В. А. СТАТУЛЯВИЧЮС

§ 1. Обозначения

Рассматривается последовательность независимых случайных величин, принимающих только целочисленные значения:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \ldots \tag{1.1}$$

Пусть $\mathbf{M}\xi_k=0$, $\mathbf{D}\xi_k=\sigma_k^2<\infty$ для всех k. Пусть, далее,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k, \quad B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2, \quad Z_n=\frac{S_n}{B_n}.$$

Обозначим через $F_\xi(x)$ функцию распределения, $f_\xi(t)$ – характеристическую функцию случайной величины ξ. Нам еще понадобится симметризованная случайная величина $\tilde{\xi}_k$ с функцией распределения

$$F_{\tilde{\xi}_k}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_{\xi_k}(x+y)\,dF_{\xi_k}(y)$$

и характеристической функцией

$$|f_{\tilde{\xi}_k}(t)|=|f_{\xi_k}(t)|^2.$$

Пусть

$$p_{k|m}=\mathbf{P}\{\xi_k=m\}, \quad \tilde{p}_{k|m}=\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_k=m\}.$$

По определению последовательность (1.1) удовлетворяет центральной предельной теореме (ц.п.т.), если

$$\sup_x|F_{z_n}(x)-\Phi(x)|\to 0 \qquad (n\to\infty), \tag{1.2}$$

и удовлетворяет локальной предельной теореме (л.п.т.), если

$$\sup_m\left|B_n\mathbf{P}\{S_n=m\}-\varphi\left(\frac{m}{B_n}\right)\right|\to 0 \qquad (n\to\infty), \tag{1.3}$$

где $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ – соответственно функция распределения и плотность $(0, 1)$ – нормального распределения.

Если соотношение (1.3) имеет место как для исходной последовательности (1.1), так и для любой другой последовательности, полученной из исходной путем изменения распределений конечного числа членов (с сохранением, разумеется, целочисленности), то говорят, что последовательность (1.1) удовлетворяет усиленной л.п.т. (у.л.п.т.).

Рассмотрим функции

$$l_n(N)=\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{|m|\leqslant N} m^2 p_{k/m}, \qquad N>0, \tag{1.4}$$

$$\alpha_k(a,\ q,\ N)=\frac{1}{q^2}\sum_r{}^{*} r^2\mathbf{P}\{a\bar{\xi}_k\equiv r\,(\mathrm{mod}\,q),\ |\xi_k|\leqslant N\}, \tag{1.5}$$

где $\sum_r^{*}$ означает суммирование по всем абсолютно наименьшим вычетам по модулю q, т. е. по $-\frac{q}{2}<r\leqslant\frac{q}{2}$.

Если случайные величины ξ_k имеют конечные моменты порядка $s\geqslant 3$ (s целое), то существуют дроби Ляпунова

$$L_{\nu n}=\frac{1}{B_n^{\nu}}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\,|\xi_k|^s, \qquad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ s. \tag{1.6}$$

Введем еще обозначения для выражений, встречающихся, как обычно, в асимптотических разложениях:

$$h(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-3}P_{\nu n}(it)\,L_{\nu+2,\,n}\right), \tag{1.7}$$

где многочлены

$$P_{\nu n}(it)=\sum_{m=1}^{\nu}c_{m\nu n}\,(it)^{\nu+2m},$$

$$\Phi_{s-1,\,n}(x)=\Phi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-3}Q_{\nu n}(x)\,L_{\nu+2,\,n}, \tag{1.8}$$

и

$$Q_{\nu n}(x)=\sum_{m=1}^{3\nu}a_{m\nu n}\,x^{m-1}.$$

Пусть, далее,

$$p(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}h(t)\,dt=\frac{d}{dx}\,\Phi_{s-1,\,n}(x). \tag{1.9}$$

Обозначим для краткости

$$\mathfrak{S}_n(x)=\frac{1}{B_n}\sum_{x_{mn}<x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x_{mn}^2}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-3}q_{\nu n}(x_{mn})\,L_{\nu+2,\,n}\right). \tag{1.10}$$

Введем еще функции, входящие в формулу суммирования Эйлера—Маклорена ($\lambda=1,\ 2,\ \ldots$):

$$S_{2\lambda-1}(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\nu\pi x}{2^{2\lambda-2}\,(\nu\pi)^{2\lambda-1}},$$

$$S_{2\lambda}(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\nu\pi x}{2^{2\lambda-1}\,(\nu\pi)^{2\lambda}}. \tag{1.11}$$

§ 2. Формулировка результатов

Теорема 1. *Если для последовательности* (1.1) *имеет место ц.п.т. и выражение*

$$N_n \exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\,q}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(a,\ q,\ N_n)\right\}\to 0 \tag{2.1}$$

при $n\to\infty$ *для каких-нибудь* $N_n>0$, *удовлетворяющих условию*

$$l=\varliminf_{n\to\infty} l_n(N_n)>0, \tag{2.2}$$

то тогда для (1.1) *выполняется у.л.п.т. Здесь минимум берется по всем таким a и q, что* $a\leqslant\frac{1}{2}q$, $1<q\leqslant 2N_n$, $(a,\ q)=1$.

Замечание. *Пусть существует* $\varepsilon_n>0$ *такой, что*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{|\tilde{\xi}_k|\geqslant\varepsilon_n B_n\}<\infty \tag{2.3}$$

и

$$N_n^2\varepsilon_n\to 0\qquad (n\to\infty). \tag{2.4}$$

Тогда условие (2.1) *можно заменить более простым*

$$N_n \exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\,q}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(a,\ q,\ \infty)\right\}\to 0 \tag{2.5}$$

при $n\to\infty$, *причем в этом случае от симметризованных случайных величин* $\tilde{\xi}_k$ *можно перейти к обычным величинам* ξ_k *при помощи неравенства*

$$\sum_r{}^{*} r^2\mathbf{P}\{a\tilde{\xi}_k\equiv r\,(\mathrm{mod}\,q)\}\geqslant\min_b\sum_r{}^{*} r^2\mathbf{P}\{a\xi_k\equiv r+b\,(\mathrm{mod}\,q)\}. \tag{2.6}$$

Действительно,

$$\sum_r{}^{*} r^2\mathbf{P}\{a\tilde{\xi}_k\equiv r\,(\mathrm{mod}\,q)\}=$$

$$=\sum_{-\frac{q}{2}<r_1-r_2\leqslant\frac{q}{2}}(r_1-r_2)^2\mathbf{P}\{a\xi_k\equiv r_1\,(\mathrm{mod}\,q)\}.\quad \mathbf{P}\{a\xi_k\equiv r_2\,(\mathrm{mod}\,q)\}=$$

$$=\sum_{r_2}{}^{*}\Bigg(\sum_{-\frac{q}{2}+r_2<r_1\leqslant\frac{q}{2}+r_2}(r_1-r_2)^2\mathbf{P}\{a\xi_k\equiv r_1\,(\mathrm{mod}\,q)\}\Bigg)\mathbf{P}\{a\xi_k\equiv r_2\,(\mathrm{mod}\,q)\}=$$

$$=\sum_{r_2}{}^{*}A_{r_2}\mathbf{P}\{a\xi_k\equiv r_2\,(\mathrm{mod}\,q)\}\geqslant\min_{r_2}A_{r_2},$$

где обозначено

$$A_{r_2}=\sum_{-\frac{q}{2}+r_2<r_1\leqslant\frac{q}{2}+r_2}(r_1-r_2)^2\mathbf{P}\{a\xi_k\equiv r_1\,(\mathrm{mod}\,q)\}.$$

Пусть $\min\limits_{r_2}A_{r_2}$ достигается при $r_2=r_0$. Но

$$A_{r_0}=\sum_{-\frac{q}{2}+r_0<r<\frac{q}{2}+r_0}(r-r_0)^2\mathbf{P}\{a\xi_k\equiv r\,(\mathrm{mod}\,q)\}=$$

$$=\sum_{-\frac{q}{2}<r\leqslant\frac{q}{2}}r^2\mathbf{P}\{a\xi_k\equiv r+r_0\,(\mathrm{mod}\,q)\},$$

поэтому имеет место (2.6).

Условия, при выполнении которых имеет место л. п. т. для решетчатого случая, исследовались ранее Б. В. Гнеденко [1], Ю. В. Прохоровым [2], В. В. Петровым [3], Ю. А. Розановым [4], Т. А. Азларовым [5] и другими авторами. Нетрудно проверить, что в теорему 1 ранее известные результаты входят в качестве частных случаев.

Так, например, в условиях работы Ю. А. Розанова [4] число N_n можно выбрать равномерно по n ограниченным, поэтому $\varepsilon_n > 0$, упомянутый в замечании, существует. Поэтому условие Ю. А. Розанова

$$\sum_{k=1}^{n} \min_r \mathbf{P}\{\xi_k \not\equiv r \pmod q\} \to \infty \qquad (n \to \infty) \tag{2.7}$$

влечет за собой условие (2.5), так как

$$\alpha_k(a,\ q,\ \infty) \geqslant \frac{1}{q^2} \min_b \sum_r{}^{*} r^2 \mathbf{P}\{a\xi_k \equiv r + b \pmod q\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{q^2} \mathbf{P}\{a\xi_k \not\equiv b \pmod q\} \geqslant \frac{1}{q^2} \min_r \mathbf{P}\{\xi_k \not\equiv r \pmod q\}.$$

Наиболее трудному случаю равномерно распределенных решетчатых случайных величин пришлось посвятить специальное исследование (см. [5]). Однако и этот случай укладывается в теорему 1. Действительно, пусть величина ξ_k принимает с одинаковыми вероятностями $\frac{1}{2\mu_k+1}$ значения $m=0$, ± 1, ± 2, $\ldots$, $\pm\mu_k$. Тогда в качестве N_n можем выбрать $2 \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \mu_k$. Нетрудно вычислить, что в этом случае

$$\min_{a,\,q} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(a,\ q,\ N_n) \geqslant cn,$$

и так как

$$N_n = o(B_n) = \exp\Big(o(n)\Big),$$

то условие (2.1) выполняется.

Теорема 2. *Если для какого-нибудь целого $s \geqslant 3$ случайные величины* (1.1) *имеют конечные моменты $\mathbf{M}|\xi_k|^s$, то при любом $N_n \geqslant 4B_nL_{3n}$ имеют место асимптотические разложения:*

$$B_n\mathbf{P}\{S_n = m\} = \varphi(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{\nu=1}^{s-3} Q_{\nu n}(x) L_{\nu+2,\,n}\right) +$$

$$+ \Theta_1 L_{sn} + \Theta_2 N_n \exp\left\{-\frac{1}{2} \min_{a,\,q} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\left(a,\ q,\ \frac{\pi}{4} N_n\right)\right\}; \tag{2.8}$$

$$F_{z_n}(x) = \Phi_{s-1,\,n}(x) + \sum_{\nu=1}^{s-3} \frac{h_\nu}{B_n^\nu} S_\nu(xB_n) \frac{d^\nu}{dx^\nu} \Phi_{s-1,\,n}(x) +$$

$$+ \hat{\Theta}_1 L_{sn} + \hat{\Theta}_2 N_n L_{3n} \exp\left\{-\frac{1}{2} \min_{a,\,q} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\left(a,\ q,\ \frac{\pi}{4} N_n\right)\right\}. \tag{2.9}$$

Здесь $h_\nu = +1$ *для* ν *вида* $4m+1$ *и* $4m+2$ *и* $h_\nu = -1$ *для* ν *вида* $4m$ *и* $4m+3$.

§ 3. Основные леммы

Лемма 1. *При любых $n \geqslant 1$ и $N_n > 0$ существует такое разбиение*

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{M_n} = \frac{1}{2}$$

интервала $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ *рациональными точками* $t_i^{(n)} = \frac{a_i}{q_i}$ *с условием*

$$t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)} \leqslant \frac{1}{4N_n}, \quad q_i \leqslant 4N_n, \quad (a_i, q_i) = 1,$$

что

$$J_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m} (mt)^2 \tilde{p}_{k/m} \geqslant \frac{1}{36} (t - t_{io}^{(n)})^2 l_n(N_n) B_n^2, \tag{3.1}$$

если $t \in [t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]$, *причем* $t_{io}^{(n)}$ *при данном n в зависимости от i равно или* $t_i^{(n)}$, *или* $t_{i+1}^{(n)}$. *При этом* $M_n \leqslant 5N_n$.

Доказательство. Разбиваем интервал $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ рациональными точками вида $t_i = \frac{a_i}{q_i} = \frac{i}{4N_n}$ (считаем N_n целым; в случае же не целого N_n, всюду вместо N_n будет фигурировать его целая часть), $i = 0, 1, 2, \ldots, 2N_n$, на равные части длины $\delta_n = \frac{1}{4N_n}$. Очевидно, $q_i \leqslant 4N_n$. Для рациональной точки $t_i = \frac{a}{q}$ определим:

$$A^+(t_i) = \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant \frac{q}{2}} \{m: am \equiv r \pmod q, \ 0 \leqslant m \leqslant N_n\}, \tag{3.2}$$

$$A^-(t_i) = \bigcup_{-\frac{q}{2} < r < 0} \{m: am \equiv r \pmod q, \ 0 \leqslant m \leqslant N_n\}.$$

Пусть

$$D_n^+(t_i) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m \in A^+(t_i)} m^2 \tilde{p}_{k/m},$$

$$D_n^-(t_i) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m \in A^-(t_i)} m^2 \tilde{p}_{k/m}. \tag{3.3}$$

В силу симметричности $\tilde{p}_{k/m}$ очевидно

$$D_n^+(t_i) + D_n^-(t_i) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{|m| \leqslant N_n} m^2 \tilde{p}_{k/m} = \frac{1}{2} l_n(N_n) B_n^2. \tag{3.4}$$

Если $m \in A^+(t_i)$ и $t \in [t_i, t_i + \delta_n]$, имеем

$$(mt) = \left(\frac{ma}{q} + \left(t - \frac{a}{q}\right) m \right) \geqslant \frac{1}{3} \left(\left(\frac{ma}{q} \right) + \left(t - \frac{a}{q}\right) m \right) \geqslant \frac{1}{3} \left(t - \frac{a}{q}\right) m,$$

так как

$$\left(t - \frac{a}{q}\right) m \leqslant \delta_n \cdot N_n \leqslant \frac{1}{4}.$$

Аналогично при $m \in A^-(t_i)$ и $t \in [t_i - \delta_n, t_i]$ имеем

$$(|mt|) \geqslant \frac{1}{3} \left(\left(\frac{ma}{q} \right) + \left(\frac{a}{q} - t\right) m \right) \geqslant \frac{1}{3} \left(\frac{a}{q} - t\right) m.$$

Поэтому получаем

$$J_n(t) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{m \in A^+(t_i)} (mt)^2 \tilde{p}_{k/m} \geqslant \frac{1}{9}(t-t_i)^2 D_n^+(t_i), \tag{3.5}$$

если $t \in [t_i, t_i+\delta_n]$. Аналогично

$$J_n(t) \geqslant \frac{1}{9}(t-t_i)^2 D_n^-(t_i), \tag{3.6}$$

если $t \in [t_i-\delta_n, t_i]$.

Рассмотрим любой интервал $[t_i, t_{i+1}]$. Если

$$D_n^+(t_i) \geqslant D_n^-(t_i), \tag{3.7}$$

тогда в силу вышеизложенного для всех $t_i \in [t_i, t_{i+1}]$

$$J_n(t) \geqslant \frac{1}{9}(t-t_i)^2 \max\{D_n^+(t_i), D_n^-(t_i)\} \geqslant \frac{1}{36}(t-t_i)^2 l_n(N_n) B_n^2.$$

Если

$$D_n^+(t_i) \leqslant D_n^-(t_i) \quad \text{и} \quad D_n^+(t_{i+1}) \leqslant D_n^-(t_{i+1}), \tag{3.8}$$

тогда для всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$J_n(t) \geqslant \frac{1}{36}(t-t_{i+1})^2 l_n(N_n) B_n^2.$$

Если же

$$D_n^+(t_i) < D_n^-(t_i), \quad \text{но} \quad D_n^+(t_{i+1}) > D_n^-(t_{i+1}), \tag{3.9}$$

то для всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$ можно найти такие a и q, $(a, q)=1$, $q \leqslant 4N_n$, что

$$\left| t - \frac{a}{q} \right| \leqslant \frac{1}{4N_n q}. \tag{3.10}$$

Рассмотрим все такие дроби $\frac{a}{q} \in [t_i, t_{i+1}]$. Ввиду (3.9) найдутся две соседние дроби $\frac{a_m}{q_m}$ и $\frac{a_{m+1}}{q_{m+1}}$ такие, что

$$D_n^+\left(\frac{a_m}{q_m}\right) < D_n^-\left(\frac{a_m}{q_m}\right), \quad \text{а} \quad D_n^+\left(\frac{a_{m+1}}{q_{m+1}}\right) \geqslant D_n^-\left(\frac{a_{m+1}}{q_{m+1}}\right).$$

Поэтому интервал $[t_i, t_{i+1}]$ разобьем на три интервала

$$\left[t_i, \frac{a_m}{q_m}\right], \quad \left(\frac{a_m}{q_m}, \frac{a_{m+1}}{q_{m+1}}\right), \quad \left[\frac{a_{m+1}}{q_{m+1}}, t_{i+1}\right]$$

(один из них может оказаться пустым). В интервале $\left[t_i, \frac{a_m}{q_m}\right]$ выполняются неравенства (3.8), поэтому

$$J_n(t) \geqslant \frac{1}{36}\left(t - \frac{a_m}{q_m}\right)^2 l_n(N_n) B_n^2.$$

В интервале $\left[\frac{a_{m+1}}{q_{m+1}}, t_{i+1}\right]$ выполнено неравенство (3.7), поэтому

$$J_n(t) \geqslant \frac{1}{36}\left(t - \frac{a_{m+1}}{q_{m+1}}\right)^2 l_n(N_n) B_n^2.$$

Интервал же $\left(\frac{a_m}{q_m}, \frac{a_{m+1}}{q_{m+1}}\right)$ можно разбить на два интервала $\left(\frac{a_m}{q_m}, b_m\right]$ и $\left(b_m, \frac{a_{m+1}}{q_{m+1}}\right)$ таких, что ввиду (3.10) для всех $t \in \left(\frac{a_m}{q_m}, b_m\right]$

$$\left| t - \frac{a_m}{q_m} \right| \leqslant \frac{1}{4N_n q_m},$$

а для всех $t \in \left(b_m, \frac{a_{m+1}}{q_{m+1}}\right)$

$$\left| t - \frac{a_{m+1}}{q_{m+1}} \right| \leqslant \frac{1}{4N_n q_{m+1}}.$$

Поэтому в этих интервалах

$$J_n(t) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{|m| \leqslant N_n} \left(\frac{ma}{q} + \left(t - \frac{a}{q}\right) m \right)^2 \tilde{p}_{k/m} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{|m| \leqslant N_n} \left(\frac{3}{4q}\right)^2 \tilde{p}_{k/m} \geqslant$$

$$\geqslant 9\left(t - \frac{a}{q}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{|m| \leqslant N_n} m^2 \tilde{p}_{k/m} = 9\left(t - \frac{a}{q}\right)^2 l_n(N_n) B_n^2.$$

Этим требуемое разбиение построено. Нетрудно подсчитать, что число интервалов в этом разбиении $M_n \leqslant 5N_n$.

Лемма 2. *В интервале* $\frac{1}{\tau} \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2}$ *справедлива оценка:*

$$J_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m} (mt)^2 \tilde{p}_{k/m} \geqslant \frac{1}{4} \min_{a,\, q} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(a,\ q,\ \frac{1}{2}\tau\right), \tag{3.11}$$

где

$$\alpha_k \left(a,\ q,\ \frac{1}{2}\tau\right) = \frac{1}{q^2} \sum_{-\frac{q}{2} < r \leqslant \frac{q}{2}} r^2 \mathbf{P}\left\{ a\tilde{\xi}_k \equiv r \ (\mathrm{mod}\ q),\ |\tilde{\xi}_k| \leqslant \frac{1}{2}\tau \right\}, \tag{3.12}$$

а минимум берется по всем несократимым дробям $\frac{a}{q}$ *из интервала* $\left[\frac{1}{\tau},\ \frac{1}{2}\right]$ *со знаменателями* $1 < q \leqslant \tau$ $\left(\text{т. е. } a \leqslant \frac{1}{2} q,\ 1 < q \leqslant \tau \text{ и } (a,\ q) = 1\right)$.

Доказательство. Для всех $t \in \left[\frac{1}{\tau},\ \frac{1}{2}\right]$ можем найти такие a и q, $(a,\ q) = 1$, $q \leqslant \tau$, что

$$\left| t - \frac{a}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q\tau}. \tag{3.13}$$

Если разобьем интервал $\left[\frac{1}{\tau},\ \frac{1}{2}\right]$ на интервалы $[t_i,\ t_{i+1}]$ с центрами в точках $\frac{a}{q} = \frac{a_i}{q_i}$, то в каждом таком интервале получим:

$$J_n(t) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{|m| \leqslant \frac{1}{2}\tau} \left(\frac{ma}{q} + \left(t - \frac{a}{q}\right) m \right)^2 \tilde{p}_{k/m} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{-\frac{q}{2} < r \leqslant \frac{q}{2}} \sum_{\substack{|m| \leqslant \frac{1}{2}\tau \\ am \equiv r \ (\mathrm{mod}\ q)}} \left(\frac{r}{q} + \left(t - \frac{a}{q}\right) m \right) \tilde{p}_{k/m} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{-\frac{q}{2} < r \leqslant \frac{q}{2}} \sum_{\substack{|m| \leqslant \frac{1}{2}\tau \\ am \equiv r \ (\mathrm{mod}\ q)}} \left(\frac{r}{2q} \right)^2 \tilde{p}_{k/m},$$

так как ввиду (3.13)

$$\left| \left(t - \frac{a}{q}\right) m \right| \leqslant \frac{1}{2q}.$$

Далее

$$J_n(t) \geqslant \frac{1}{4q^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{-\frac{q}{2}<r\leqslant\frac{q}{2}} r^2 \sum_{\substack{|m|\leqslant\frac{1}{2}\tau \\ am\equiv r\,(\mathrm{mod}\, q)}} \tilde{p}_{k|m} =$$

$$=\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^2} \sum_{-\frac{q}{2}<r\leqslant\frac{q}{2}} r^2 \mathbf{P}\left\{a\tilde{\xi}_k \equiv r\,(\mathrm{mod}\, q),\ |\tilde{\xi}_k| \leqslant \frac{1}{2}\tau\right\}.$$

Тогда во всем интервале $\left[\frac{1}{\tau}, \frac{1}{2}\right]$ справедлива оценка

$$J_n(t) \geqslant \frac{1}{4} \min_{a,\, q} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\left(a,\ q,\ \frac{1}{2}\tau\right),$$

где смысл $\min\limits_{a,\, q}$ указан в формулировке леммы. Лемма доказана.

§ 4. Доказательства теорем 1 и 2

По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{S_n=m\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt} f_{s_n}(t)\,dt.$$

Отсюда

$$B_n \mathbf{P}\{S_n=m\}=\frac{B_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-imt} f_{s_n}(t)\,dt = I_1+I_2+I_3+I_4+I_5,$$

где

$$I_1=\frac{B_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-imt-\frac{1}{2}B_n^2t^2}\,dt,$$

$$I_2=-\frac{B_n}{2\pi}\int_{|t|\geqslant\frac{A_n}{B_n}} e^{-imt-\frac{1}{2}B_n^2t^2}\,dt,$$

$$I_3=\frac{B_n}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\frac{A_n}{B_n}} e^{-imt}\left[f_{s_n}(t)-e^{-\frac{1}{2}B_n^2t^2}\right]dt,$$

$$I_4=\frac{B_n}{2\pi}\int_{\frac{A_n}{B_n}\leqslant|t|\leqslant\frac{\pi}{N_n}} e^{-imt} f_{s_n}(t)\,dt,$$

$$I_5=\frac{B_n}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{N_n}\leqslant|t|\leqslant\pi} e^{-imt} f_{s_n}(t)\,dt.$$

Здесь N_n – функция, фигурирующая в условиях теоремы. Переходим к оценке этих интегралов:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{m}{B_n}t - \frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\frac{m^2}{B_n^2}}, \tag{4.1}$$

$$|I_2| \leqslant \frac{B_n}{2\pi} \int_{|t| \geqslant \frac{A_n}{B_n}} e^{-\frac{1}{2}B_n^2 t^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geqslant A_n} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leqslant \frac{1}{\pi A_n} e^{-\frac{1}{2}A_n^2} \to 0 \tag{4.2}$$

для любой последовательности $A_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Далее,

$$|I_3| \leqslant \frac{B_n}{2\pi} \int_{|t| \leqslant \frac{A_n}{B_n}} \left| f_{s_n}(t) - e^{-\frac{1}{2}B_n^2 t^2} \right| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leqslant A_n} \left| fz_n(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| dt.$$

Согласно ц.п.т., можно найти такую медленно возрастающую последовательность $A_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, что

$$|I_3| \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{4.3}$$

Далее выводим

$$|I_4| \leqslant \frac{B_n}{2\pi} \int_{\frac{A_n}{B_n} \leqslant |t| \leqslant \frac{\pi}{N_n}} |f_{s_n}(t)|\, dt = B_n \int_{\frac{A_n}{2\pi B_n} \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2N_n}} |f_{s_n}(2\pi t)|\, dt.$$

Применив к соотношению

$$1 - |f_{\xi_k}(t)|^2 = 2 \sum_m \sin^2 \frac{tm}{2} \tilde{p}_{k/m}$$

неравенство

$$|x| \leqslant e^{-\frac{1}{2}(1 - |x|^2)},$$

получим

$$|f_{\xi_k}(t)| \leqslant \exp\left\{ -\sum_m \sin^2 \frac{tm}{2} \tilde{p}_{k/m} \right\}.$$

Поэтому

$$|f_{s_n}(2\pi t)| \leqslant \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{n} \sum_m \sin^2 \pi tm \tilde{p}_{k/m} \right\} = \exp\{-I_n(t)\}.$$

Известно, что при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$

$$|\sin \pi\alpha| \geqslant 2\alpha,$$

поэтому

$$I_n(t) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{|m| \leqslant \frac{1}{2|t|}} \sin^2 \pi tm \tilde{p}_{m/k} \geqslant$$

$$\geqslant 4t^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{|m| \leqslant \frac{1}{2|t|}} m^2 \tilde{p}_{k/m} = 4t^2 B_n^2 l_n \left(\frac{1}{2|t|} \right).$$

В интервале $|t|\leqslant\frac{1}{2N_n}$ имеем $\frac{1}{2|t|}\geqslant N_n$, поэтому, ввиду монотонности функции $l_n(N_n)$,

$$I_n(t)\geqslant 4t^2B_n^2l_n(N_n)=4t^2lB_n^2,$$

где

$$l=\varliminf_{n\to\infty} l_n(N_n)>0.$$

Отсюда имеем:

$$|I_4|\leqslant B_n\int\limits_{\frac{A_n}{2\pi B_n}\leqslant|t|\leqslant\frac{1}{2N_n}}\exp\{-4t^2lB_n^2\}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2l}}\int\limits_{\frac{A_n\sqrt{2l}}{\pi}\leqslant|y|\leqslant\frac{B_n\sqrt{2l}}{N_n}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2l}}\int\limits_{\frac{A_n\sqrt{2l}}{\pi}}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\leqslant\frac{\pi}{2lA_n}\,e^{-\frac{lA_n^2}{\pi^2}}\to 0, \tag{4.4}$$

если только $A_n\to\infty$ $(n\to\infty)$.

Для интеграла I_5 имеем:

$$|I_5|\leqslant\frac{B_n}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{N_n}\leqslant|t|\leqslant\pi}|f_{s_n}(t)|\,dt\leqslant B_n\int\limits_{\frac{1}{2N_n}\leqslant|t|\leqslant\frac{1}{2}}\exp\{-I_n(t)\}\,dt,$$

где, как и выше,

$$I_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m}\sin^2\pi tm\,\tilde{p}_{k/m}. \tag{4.5}$$

Так как всегда $|\sin\pi\alpha|\geqslant 2(\alpha)$, где (α) означает расстояние α до ближайшего целого числа, то

$$I_n(t)\geqslant 4\sum_{k=1}^{n}\sum_{m}(mt)^2\,\tilde{p}_{k/m}=4J_n(t),$$

поэтому в данном интервале $\left[\frac{1}{2N_n},\ \frac{1}{2}\right]$ можно воспользоваться оценками из лемм 1 и 2.

Разобьем интервал $\left[\frac{1}{2N_n},\ \frac{1}{2}\right]$ в лемме 1 указанным способом. Используя симметричность функции $I_n(t)$, пишем:

$$|I_5|\leqslant 2B_n\sum_i\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\exp\{-2J_n(t)-2J_n(t)\}\,dt.$$

Для одного слагаемого $2J_n(t)$ применим лемму 1, а для другого – лемму 2, в которой положим $\tau=2N_n$. Тогда имеем:

$$|I_5|\leqslant 2B_n\exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\,q}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(a,\ q,\ N_n)\right\}\times$$

$$\times\sum_i\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\exp\left\{-\frac{1}{18}\,(t-t_{io}^{(n)})^2\,lB_n^2\right\}dt.$$

Так как для любого интервала

$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \exp\left\{-\frac{1}{18}(t-t_{io}^{(n)})^2 lB_n^2\right\} dt = \frac{3}{B_n\sqrt{l}} \int\limits_{\frac{1}{3}(t_i-t_{io}^{(n)})B_n\sqrt{l}}^{\frac{1}{3}(t_{i+1}-t_{io}^{(n)})B_n\sqrt{l}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{B_n\sqrt{l}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{3\sqrt{2\pi}}{B_n\sqrt{l}}, \tag{4.6}$$

а количество интервалов $M_n \leqslant 5N_n$, то окончательно получаем:

$$|I_5| \leqslant \frac{30\sqrt{2\pi}}{\sqrt{l}} N_n \exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\,q}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(a,\ q,\ N_n)\right\}.$$

Ввиду условия (2.1)

$$|I_5| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4.7}$$

Теперь из оценок (4.1)–(4.4), (4.7) следует утверждение теоремы 1.

Докажем теперь, что теорема 1 верна при выполнении условий 2.2)–(2.5) (см. Замечание в § 2). С этой целью воспользуемся тем же разбиением интервала $\left[\frac{1}{2N_n},\ \frac{1}{2}\right]$, однако в каждом из интервалов $\Delta_i = [t_i,\ t_{i+1}]$ в окрестности точки $t_{io}^{(n)} = \frac{a_i}{q_i} = \frac{a}{q}$ выделим еще интервал Δ_i' длины $\frac{1}{2q\varepsilon_n B_n}$. Так, если $t_{io}^{(n)}$ совпадает с t_i, то $\Delta_i' = \left[t_{io}^{(n)},\ t_{io}^{(n)} + \frac{1}{2q\varepsilon_n B_n}\right]$; если же $t_{io}^{(n)}$ совпадает с t_{i+1}, то тогда $\Delta_i' = \left[t_{io}^{(n)} - \frac{1}{2q\varepsilon_n B_n},\ t_{io}^{(n)}\right]$. Для простоты выкладок ограничимся первым из этих случаев, второй же получается аналогично.

Пишем:

$$|I_5| \leqslant 2\sum_i (U_1 + U_2),$$

где

$$U_1 = B_n \int\limits_{\Delta_i'} \exp\{-4J_n(t)\}\,dt,$$

$$U_2 = B_n \int\limits_{\Delta_i\setminus\Delta_i'} \exp\{-4J_n(t)\}\,dt. \tag{4.8}$$

В интервале Δ_i' при $|m| \leqslant \varepsilon_n B_n$ верно соотношение

$$\left|\left(t-\frac{a}{q}\right)m\right| \leqslant \frac{1}{2q},$$

а поэтому

$$J_n(t) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{|m|\leqslant\varepsilon_n B_n} \left(\frac{ma}{q} + \left(t-\frac{a}{q}\right)m\right)^2 \tilde{p}_{k|m} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{r}{}^{*} \sum_{\substack{|m|\leqslant\varepsilon_n B_n \\ am\equiv r \ (\mathrm{mod}\ q)}} \left(\frac{r}{q} + \left(t-\frac{a}{q}\right)m\right)^2 \tilde{p}_{k|m} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{r}{}^{*} \sum_{\substack{|m|\leqslant\varepsilon_n B_n \\ am\equiv r \ (\mathrm{mod}\ q)}} \left(\frac{r}{2q}\right)^2 \tilde{p}_{k|m} =$$

$$= \frac{1}{4q^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{r}{}^{*} r^2 \sum_{\substack{|m|\leqslant\varepsilon_n B_n \\ am\equiv r \ (\mathrm{mod}\ q)}} \tilde{p}_{k|m} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(a,\ q,\ \varepsilon_n B_n).$$

Полученная оценка и лемма 1 дают:

$$U_1 = B_n \int\limits_{\Delta_i'} \exp\{-2J_n(t) - 2J_n(t)\}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant B_n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(a,\ q,\ \varepsilon_n B_n)\right\} \int\limits_{t_{io}^{(n)}}^{t_{io}^{(n)}+\frac{1}{2q\varepsilon_n B_n}} \exp\left\{-\frac{1}{18}(t-t_{io}^{(n)})^2\, lB_n^2\right\} dt =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{l}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(a,\ q,\ \varepsilon_n B_n)\right\} \int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{l}}{6q\varepsilon_n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{l}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(a,\ q,\ \varepsilon_n B_n)\right\}.$$

Для оценки U_2 используем лемму 2 (положив в ней $\tau = 2N_n$) и лемму 1:

$$U_2 = B_n \int\limits_{\Delta_i \setminus \Delta_i'} \exp\{-2J_n(t) - 2J_n(t)\}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant B_n \exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\,q}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(a,\ q,\ N_n)\right\} \int\limits_{\frac{1}{2q\varepsilon_n B_n}}^{t_{i+1}-t_{io}^{(n)}} \exp\left\{-\frac{1}{18}t^2 lB_n^2\right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{\sqrt{l}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\,q}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(a,\ q,\ N_n)\right\} \int\limits_{\frac{\sqrt{l}}{6q\varepsilon_n}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{18}{l}\, q\varepsilon_n \exp\left\{-\frac{l}{72q^2\varepsilon_n^2}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\,q}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(a,\ q,\ N_n)\right\}.$$

Имея в виду, что число интервалов в нашем разбиении не превосходит $5N_n$, а $q \leqslant 2N_n$, для I_5 получаем:

$$|I_5| \leqslant 2\sum_{i}(U_1 + U_2) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{15\sqrt{2\pi}}{\sqrt{l}} N_n \exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\,q}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(a,\ q,\ \varepsilon_n B_n)\right\} +$$

$$+ \frac{360}{l} N_n^2 \varepsilon_n \exp\left\{-\frac{l}{288\, N_n^2 \varepsilon_n^2}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\,q}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(a,\ q,\ N_n)\right\}.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(a,\ q,\ \varepsilon_n B_n) \geqslant \frac{1}{q^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r}{}^{*} r^2 \mathbf{P}\{a\tilde{\xi}_k \equiv r \pmod q\} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{|\tilde{\xi}_k| > \varepsilon_n B_n\},$$

то, ввиду условия (2.3), окончательно получаем:

$$|I_5| \leqslant C_1 N_n \exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\,q}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(a,\ q,\ \infty)\right\} + C_2 N_n^2 \varepsilon_n.$$

Условия (2.4) и (2.5) теперь дают:

$$I_5 \to 0 \qquad (n \to \infty), \tag{4.9}$$

что, вместе с (4.1)–(4.4), доказывает наше утверждение.

Приступим к доказательству теоремы 2. Имеем:

$$\sup_m |B_n \mathbf{P}\{S_n = m\} - p(x_{mn})| \leqslant \frac{1}{2\pi}(I'_1 + I'_2 + I'_3 + I'_4),$$

где

$$I'_1 = \int\limits_{|t| \leqslant A_n} |f_{z_n}(t) - h(t)|\,dt,$$

$$I'_2 = \int\limits_{|t| > A_n} |h(t)|\,dt,$$

$$I'_3 = \int\limits_{A_n < |t| \leqslant K_n} |f_{z_n}(t)|\,dt,$$

$$I'_4 = \int\limits_{K_n < |t| \leqslant \pi B_n} |f_{z_n}(t)|\,dt.$$

Выберем $A_n = \frac{1}{s} L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}$. Для интегралов I'_1, I'_2 и I'_3 воспользуемся некоторыми оценками из статьи [6]. В аналогичных условиях там получено:

$$I'_1 = \Theta'_1 L_{sn}, \tag{4.10}$$

где Θ'_1 равномерно ограничено относительно n;

$$I'_2 \leqslant \Theta'_2 L_{sn}^{-\frac{3s-10}{3(s-2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2s^2} L_{sn}^{-\frac{2}{3(s-2)}}\right\}. \tag{4.11}$$

Далее, если положим $K_n = L_{3n}^{-1}$, а $N_n \geqslant 4B_n L_{3n}$, тогда, как известно,

$$l_n(N_n) \geqslant 1,$$

и по лемме Крамера ([7], стр. 93):

$$|f_{z_n}(t)| \leqslant e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{при} \quad |t| \leqslant L_{3n}^{-1}$$

получаем, что

$$I'_3 \leqslant 3s L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}} \exp\left\{-\frac{1}{3s^2} L_{sn}^{-\frac{2}{3(s-2)}}\right\}. \tag{4.12}$$

Наконец,

$$I'_4 = 2\pi B_n \int\limits_{\frac{K_n}{2\pi B_n} < |t| \leqslant \frac{1}{2}} |f_{S_n}(2\pi t)|\,dt \leqslant 2\pi B_n \int\limits_{\frac{2}{\pi N_n} < |t| \leqslant \frac{1}{2}} \exp\{-l_n(t)\}\,dt,$$

где $I_n(t)$ определено в (4.5). Мы опять разобьем интервал $\left[\frac{2}{\pi N_n}, \frac{1}{2}\right]$ способом, указанным в лемме 1. Как и при оценке интеграла $|I_5|$ в теореме 1, применим леммы 1 и 2 $\left(\text{в последней положим } \tau = \frac{\pi}{2} N_n\right)$:

$$I_4' \leqslant 4\pi B_n \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \exp\{-2J_n(t) - 2J_n(t)\}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi B_n \exp\left\{-\frac{1}{2} \min_{a,q} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(a, q, \frac{\pi}{4} N_n\right)\right\} \times$$

$$\times \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \exp\left\{-\frac{1}{18} (t - t_{io}^{(n)})^2 l B_n^2\right\} dt.$$

Ввиду (4.6) окончательно получаем:

$$I_4' \leqslant \frac{60\pi \sqrt{2\pi}}{\sqrt{l}} N_n \exp\left\{-\frac{1}{2} \min_{a,q} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(a, q, \frac{\pi}{4} N_n\right)\right\}. \tag{4.13}$$

Из соотношений (4.10)–(4.13) следует справедливость (2.8).

Для доказательства соотношения (2.9) заметим, что

$$\sup_x |F_{Z_n}(x) - \mathfrak{S}_n(x)| = \sup_y \left| F_{S_n}(y) - \mathfrak{S}\left(\frac{y}{B_n}\right)\right|,$$

где функции $F_{S_n}(y)$ и $\mathfrak{S}_n\left(\frac{y}{B_n}\right)$ имеют скачки в целочисленных точках y поэтому по аналогу известной теоремы И. П. Цареградского [8]

$$\sup_x |F_{Z_n}(x) - \mathfrak{S}_n(x)| \leqslant \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f_{S_n}(t) - h(tB_n)}{t} \right| dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} \left| \frac{f_{Z_n}(t) - h(t)}{t} \right| dt \leqslant \frac{1}{4} (\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_4),$$

где подынтегральная функция интеграла $\hat{I}_j$ отличается от подынтегральной функции интеграла I_j' только множителем $|t|^{-1}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Поэтому соответствующие оценки получаются аналогично. Итак,

$$F_{Z_n}(x) = \mathfrak{S}_n(x) + \hat{\Theta}_1 L_{sn} + \hat{\Theta}_2 N_n L_{3n} \exp\left\{-\frac{1}{2} \min_{a,q} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(a, q, \frac{\pi}{4} N_n\right)\right\}.$$

В дальнейшем остается лишь применить к $\mathfrak{S}_n(x)$ формулу суммирования Эйлера—Маклорена, и мы приходим к соотношению (2.9).

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
5.VII.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.
2. Ю. В. Прохоров, О локальной предельной теореме для решетчатых распределений, ДАН СССР, **98**, 4 (1954), 535—538.
3. В. В. Петров, Локальная теорема для решетчатых распределений, ДАН СССР, **115**, 1 (1957), 49—52.
4. Ю. А. Розанов, О локальной предельной теореме для решетчатых распределений, Теор. вероятн. и ее примен., **2**, 2 (1957), 278—281.
5. Т. А. Азларов, Об одной предельной теореме для решетчатых распределений, «Предельные теоремы теории вероятностей», Ташкент, 1963, 5—14.
6. В. А. Статулявичюс, Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теор. вероятн. и ее примен., **10**, 4(1965), 645—659.
7. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, М., 1947.
8. И. П. Цареградский, О равномерном приближении биномиального распределения неограниченно делимыми законами, Теор. вероятн. и ее примен., **3**, 4(1958), 470—474.

LOKALINĖ RIBINĖ TEOREMA IR ASIMPTOTINIS IŠDĖSTYMAS NEPRIKLAUSOMŲ RĖTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMOMS

A. MITALAUSKAS, V. STATULEVIČIUS

(Reziumė)

Straipsnyje randamos gana bendros sąlygos, kad galioja lokalinė ribinė teorema (1 teorema) ir asimptotinis išdėstymas (2 teorema) nepriklausomų rėtinių atsitiktinių dydžių sumoms.

LOCAL LIMIT THEOREM AND ASYMPTOTIC EXPANSION FOR THE SUMS OF INDEPENDENT LATTICE RANDOM VARIABLES

A. MITALAUSKAS, V. STATULEVIČIUS

(Summary)

In this paper fairly general conditions for the local limit theorem (theorem 1) and asymptotic expansion (theorem 2) for the distribution of sums of independent lattice random variables to hold are obtained.