LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

# РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В. В. ШИЛЕРИС

Рассмотрим следующую краевую задачу для системы уравнений эллиптического типа, имеющую применение в теории упругости:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta u+p\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+f(x,\ y)\cdot\omega+\varphi(x,\ y)\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}=F(x,\ y),\\
&\Delta v+q\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+g(x,\ y)\cdot\omega+\psi(x,\ y)\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}=G(x,\ y),\\
&\Delta\Delta\omega+\xi(x,\ y)\cdot\omega+\eta(x,\ y)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\zeta(x,\ y)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=Z(\alpha,\ y);
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&v(0,\ y)=v(\alpha,\ y)=0,\quad \omega(0,\ y)=\omega(\alpha,\ y)=0,\\
&u(x,\ 0)=u(x,\ \beta)=0,\quad \omega(x,\ 0)=\omega(x,\ \beta)=0,\\
&\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\x=\alpha}}=0,\quad \left.\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\x=\alpha}}=0,\\
&\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\substack{y=0\\y=\beta}}=0,\quad \left.\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right|_{\substack{y=0\\y=\beta}}=0,
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

где $p=q=\text{const}$ и функции

$$F(x,\ y),\quad G(x,\ y),\quad Z(x,\ y),\quad f(x,\ y),\quad g(x,\ y),\quad \varphi(x,\ y),\quad \psi(x,\ y),$$
$$\xi(x,\ y),\quad \eta(x,\ y),\quad \zeta(x,\ y)$$

разложимы в прямоугольнике

$$0\leqslant x\leqslant\alpha,\quad 0\leqslant y\leqslant\beta$$

в двойной ряд Фурье.

Решение разыскивается в виде тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned}
&u(x,\ y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\cdot\cos\frac{m\pi x}{\alpha}\cdot\sin\frac{n\pi y}{\beta},\\
&v(x,\ y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}B_{mn}\cdot\sin\frac{m\pi x}{\alpha}\cos\frac{n\pi y}{\beta},\\
&\omega(x,\ y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{mn}}{\left[\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{n}{\beta}\right)^2\right]^2}\cdot\sin\frac{m\pi x}{\alpha}\sin\frac{n\pi y}{\beta}.
\end{aligned}\tag{3}$$

Очевидно, что каждое слагаемое каждого ряда удовлетворяет соответствующим краевым условиям (2).

Обозначим:

$$L_1(u,\ v) = \Delta u + p\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$L_2(u,\ v) = \Delta v + p\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$L_3(\omega) = \Delta\Delta\omega + \xi(x,\ y)\cdot\omega,$$

$$M_1(\omega) = \varphi(x,\ y)\,\frac{\partial\omega}{\partial x} + f(x,\ y)\,\omega,$$

$$M_2(\omega) = g(x,\ y)\cdot\omega + \psi(x,\ y)\,\frac{\partial\omega}{\partial y},$$

$$M_3(u,\ v) = \eta(x,\ y)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \zeta(x,\ y)\,\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Заметим, что если функции $u_0$, $v_0$, $\omega_0$ являются решением системы

$$\begin{cases} L_1(u,\ v) = F(x,\ y), \\ L_2(u,\ v) = G(x,\ y), \\ L_3(\omega) = Z(x,\ y), \end{cases} \tag{4}$$

а функции

$$u_j,\ v_j,\ \omega_j, \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

являются решением системы

$$\begin{cases} L_1(u_j\ v_j) = -M_1(\omega_{j-1}), \\ L_2(u_j,\ v_j) = -M_2(\omega_{j-1}), \\ L_3(\omega_j) = -M_3(u_{j-1},\ v_{j-1}), \end{cases} \tag{5}$$

то ряды

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x,\ y), \\ v &= \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x,\ y), \\ \omega &= \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j(x,\ y), \end{aligned} \tag{6}$$

являются решением системы (1).

Поэтому нам достаточно доказать разрешимость систем (4) и (5) и сходимость рядов (6).

Займемся решением системы (4). Заметим, что она распадается на две независимые системы (4а) и (4б), имеющие самостоятельное значение в теории упругости:

$$\begin{cases} L_1(u,\ v) = F(x,\ y); \\ L_2(u,\ v) = G(x,\ y); \end{cases} \tag{4а}$$

$$L_3(\omega) = Z(x,\ y). \tag{4б}$$

В развернутом виде система (4а) является системой уравнений равновесия плоской статической задачи теории упругости, а уравнение (4б) является основным уравнением изгиба пластинки (уравнение Софи Жермен) (см. [2]).

Займемся решением уравнений (4б). Для этого введем операторы:

$$N_1(\omega)=\Delta\Delta\omega, \quad N_2(\omega)=\xi(x, y)\cdot\omega.$$

Тогда (4а) запишется в следующем виде:

$$N_1(\omega)+N_2(\omega)=0.$$

Отсюда заметим, что если $\omega_{0_0}$ является решением уравнения

$$N_1(\omega)=Z(x, y), \tag{7}$$

а

$$\omega_{0_i} \qquad (i=1, 2, 3, \ldots)$$

является решением уравнения

$$N_1(\omega_{0_i})=-N_2(\omega_{0_{i-1}}), \tag{8}$$

то ряд

$$\omega_0=\sum_{i=0}^{\infty}\omega_{0_i}(x, y), \tag{9}$$

является решением уравнения (4б).

Поэтому нам достаточно доказать разрешимость уравнений (7) и (8) и сходимость ряда (9).

Решение уравнения (7) при краевых условиях:

$$\omega(0, y)=\omega(\alpha, y)=0,$$
$$\omega(x, 0)=\omega(x, \beta)=0,$$
$$\left.\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\x=\alpha}}=0, \qquad \left.\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right|_{\substack{y=0\\y=\beta}}=0 \tag{10}$$

имеет следующий вид:

$$\omega_{0_0}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{mn}}{\pi^4\left[\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{n}{\beta}\right)^2\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{\alpha}\sin\frac{n\pi y}{\beta},$$

где

$$C_{mn}=\frac{4}{\alpha\beta}\int_0^{\alpha}\int_0^{\beta}Z(x, y)\cdot\sin\frac{m\pi x}{\alpha}\cdot\sin\frac{n\pi y}{\beta}\cdot dx\cdot dy.$$

Ряд для $\omega_{0_0}(x, y)$ будет абсолютно сходящимся. Сходятся также ряды для $\frac{\partial^2\omega_{0_0}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\omega_{0_0}}{\partial y^2}$ (см. [1]). Займемся решением уравнения (8) при краевых условиях (10). Аналогично, решением уравнения (8) будет ряд

$$\omega_{0_i}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{mn}^{(i)}\cdot\sin\frac{m\pi x}{\alpha}\sin\frac{n\pi y}{\beta}}{\pi^4\left[\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{n}{\beta}\right)^2\right]^2},$$

где

$$C_{mn}^{(i)}=\frac{4}{\alpha\beta}\int_0^{\alpha}\int_0^{\beta}[-\xi(x, y)\omega_{0_{i-1}}]\sin\frac{m\pi x}{\alpha}\sin\frac{n\pi y}{\beta}\,dx\,dy, \qquad (i=1, 2, 3, \ldots).$$

Нетрудно показать абсолютную сходимость ряда (9) при условии

$$\rho=\sup\left\{\frac{\max|\xi|\,\alpha^2\beta^2}{\pi^4\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^2}\right\}<1.$$

Отсюда следует, что он является решением уравнения (4б) при краевых условиях (10). Из оценок коэффициентов $C_{mn}^{(i)}$ следует, что ряд (9) мажорируется абсолютно сходящимся рядом

$$|\omega_0| \leqslant A_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\cos m\pi)\cdot(1-\cos n\pi)\cdot\left|\sin\frac{m\pi x}{\alpha}\cdot\sin\frac{n\pi y}{\beta}\right|}{m\cdot n\cdot\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^2(1-\rho)},$$

где $A_0$ — константа.

Этот ряд, как следует из [1], будет абсолютно сходящимся. Займемся решением системы (4а) при краевых условиях (2). Решение системы (4а) в виде тригонометрических рядов (3) получим разложив функции $F(x, y)$, $G(x, y)$ в соответствующие ряды. Сравнивая соответствующие коэффициенты получаем:

$$A_{0n} = -\frac{\beta^2}{\pi^2 n^2}a_{0n}, \quad B_{m0} = -\frac{\alpha^2}{\pi^2 m^2}b_{m0},$$

$$A_{mn} = \frac{\begin{vmatrix} a_{mn} & \frac{m\pi}{\alpha}\cdot\frac{n\pi}{\beta}\cdot p \\ b_{mn} & (1+p)\cdot\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+p)\cdot\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 & \frac{m\pi}{\alpha}\cdot\frac{n\pi}{\beta}\cdot p \\ \frac{m\pi}{\alpha}\,\frac{n\pi}{\beta}\,p & (1+p)\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2 \end{vmatrix}},$$

$$B_{mn} = \frac{\begin{vmatrix} (1+p)\cdot\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 & a_{mn} \\ \frac{m\pi}{\alpha}\cdot\frac{n\pi}{\beta}\cdot p & b_{mn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+p)\cdot\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 & \frac{m\pi}{\alpha}\cdot\frac{n\pi}{\beta}\cdot p \\ \frac{m\pi}{\alpha}\cdot\frac{n\pi}{\beta}\cdot p & (1+p)\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2 \end{vmatrix}},$$

где $a_{0n}$, $b_{m0}$, $b_{mn}$, $a_{mn}$, коэффициенты разложения $F(x, y)$, $G(x, y)$. Отсюда получаем следующие оценки для коэффициентов:

$$|A_{mn}| \leqslant \frac{\alpha\beta\left\{|a_{mn}|\left[m^2\frac{\beta}{\alpha}+(1+p)\,n^2\frac{\alpha}{\beta}\right]+|b_{mn}|\,p\cdot m\cdot n\right\}}{\pi^2(1+p)\left[m^2\frac{\beta}{\alpha}+n^2\frac{\alpha}{\beta}\right]^2}, \tag{$*$}$$

$$|B_{mn}| \leqslant \frac{\alpha\beta\left\{|b_{mn}|\left[m^2\frac{\beta}{\alpha}(1+p)+n^2\frac{\alpha}{\beta}\right]+|a_{mn}|\,p\cdot m\cdot n\right\}}{\pi^2(1+p)\left[m^2\frac{\beta}{\alpha}+n^2\frac{\alpha}{\beta}\right]^2}.$$

Исходя из оценок ($*$), получим оценки для решения системы (4а):

$$|u_0| \leqslant \frac{\beta^2}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_{0n}|}{n^2}\cdot\left|\sin\frac{n\pi y}{\beta}\right| +$$

$$+\frac{\alpha\beta}{\pi^2(1+p)}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|E_{mn}\cdot\cos\frac{m\pi x}{\alpha}\cdot\sin\frac{n\pi y}{\beta}\right|}{\left[m^2\frac{\beta}{\alpha}+n^2\frac{\alpha}{\beta}\right]^2}, \tag{11a}$$

где

$$E_{mn}=\left\{\,|a_{mn}|\left[m^2\,\frac{\beta}{\alpha}+(1+p)\,n^2\,\frac{\alpha}{\beta}\right]+p\,|b_{mn}|\cdot mn\right\}$$

и

$$|v_0|\leqslant\frac{\alpha^2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|b_{m0}|}{m^2}\cdot\left|\sin\frac{m\pi x}{\alpha}\right|+\frac{\alpha\beta}{\pi^2(1+p)}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|D_{mn}\sin\frac{m\pi x}{\alpha}\cos\frac{n\pi y}{\beta}\right|}{\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^2},\qquad(11б)$$

где

$$D_{mn}=\left\{\,|b_{mn}|\cdot\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)(1+p)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]+|a_{mn}|\,p\cdot m\cdot n\right\}.$$

Таким образом получаем оценки решения системы (4). Отметим, что решение $u_0$, $v_0$, $\omega_0$ является первым приближением (т. е. соответствует первым членам рядов (6)).

Переходим к решению системы (5). Она тоже распадается на две системы

$$\left\{\begin{aligned}L_1(u_j,\ v_j)&=-M_1(\omega_{j-1}),\\ L_2(u_j,\ v_j)&=-M_2(\omega_{j-1}),\end{aligned}\right.\qquad(5а)$$

$$L_3(\omega_j)=-M_3(u_{j-1},\ v_{j-1}).\qquad(5б)$$

Займемся решением уравнения (5б). Считая функции $u_{j-1}$, $v_{j-1}$ известными, получаем уравнение аналогичное (4б), которое будет отличаться от него лишь правой частью.

То же самое можем сказать и про систему (5а), которая будет аналогична системе (4а).

Следовательно, задача определения всех последующих приближений сводится к многократному решению системы уравнений типа (4а), (4б).

Повторяя $j$ раз указанную выше методику решения получаем оценки для $j$-того приближения:

$$|\omega_{2j}|\leqslant A_0\left[\frac{\alpha^3\beta^3}{\pi^4(1+p)}\right]^j\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)(mn)^{j-1}K_{mn}^j}{\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^{2+4j}(1-\rho)^{j+1}}\left|\sin\frac{m\pi x}{\alpha}\cdot\sin\frac{n\pi y}{\beta}\right|$$

$$(j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),\qquad(12)$$

$$|\omega_{2j-1}|\leqslant B_0\left[\frac{\alpha^3\beta^3}{\pi^4(1+p)}\right]^j\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{mn}\cdot(mn)^{j-1}\cdot K_{mn}^{j-1}\cdot\left|\sin\frac{m\pi x}{\alpha}\cdot\sin\frac{n\pi y}{\beta}\right|}{\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^{4j}(1-\rho)^j}$$

$$(j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

$$|u_{2j-1}|\leqslant A_0\,\frac{\alpha\beta}{\pi(1+p)}\left[\frac{\alpha^3\beta^3}{\pi^4(1+p)}\right]^{j-1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)F_{mn}(mn)^{j-1}}{\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^{4j}}\times$$

$$\times\frac{K_{mn}^{j-1}}{(1-\rho)^j}\left|\cos\frac{m\pi x}{\alpha}\sin\frac{n\pi y}{\beta}\right|+\frac{\beta^2}{\pi^3}\cdot\max|\varphi|\cdot A_0\left[\frac{\alpha^3\beta^3}{\pi^4(1+p)}\right]^{j-1}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos n\pi)\,n^{j-4}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\cos k\pi)^2k^{j-3}K_{mn}^{j-1}}{\left[k^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^{4j-2}(1-\rho)^j}\right\}\left|\sin\frac{n\pi y}{\beta}\right|$$

$$(j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),\qquad(13)$$

$$|u_{2j}| \leqslant B_0 \frac{\alpha\beta}{\pi(1+p)} \left[\frac{\alpha^3\beta^3}{\pi^4(1+p)}\right]^{j-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{mn} F_{mn} (mn)^j K_{mn}^{j-1}}{\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^{2+4j}(1-\rho)^j} \times$$

$$\times \left|\cos\frac{m\pi x}{\alpha} \sin\frac{n\pi y}{\beta}\right| + \frac{\beta^2}{\pi^3}\cdot \max|\varphi| B_0 \left[\frac{\alpha^3\beta^3}{\pi^4(1+p)}\right]^{j-1} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} n^{j-3} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{kn}(1-\cos k\pi) k_j^{-2} K_{mn}^{j-1}}{\left[k^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^{4j}(1-\rho)^j}\right\}\cdot\left|\sin\frac{n\pi y}{\beta}\right| \quad (j=1, 2, 3, \ldots),$$

$$|v_{2j-1}| \leqslant A_0 \frac{\alpha\beta}{\pi(1+p)} \left[\frac{\alpha^3\beta^3}{\pi^4(1+p)}\right]^{j-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi) G_{mn} (mn)^{j-1} K_{mn}^{j-1}}{\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^{4j}(1-\rho)^j} \times$$

$$\times \left|\sin\frac{m\pi x}{\alpha}\cdot\cos\frac{n\pi y}{\beta}\right| + \frac{\alpha^2}{\pi^3}\cdot\max|\psi| A_0 \left[\frac{\alpha^3\beta^3}{\pi^4(1+p)}\right]^{j-1} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} (1-\cos m\pi) m^{j-4} \left\{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1-\cos l\pi)^2 l^{j-3} K_{ml}^{j-1}}{\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+l^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^{4j-2}(1-\rho)^j}\right\}\cdot\left|\sin\frac{m\pi x}{\alpha}\right|, \quad (14)$$

$$|v_{2j}| \leqslant B_0 \frac{\alpha\beta}{\pi(1+p)} \left[\frac{\alpha^3\beta^3}{\pi^4(1+p)}\right]^{i-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{mn} G_{mn} K_{mn}^{j-1} (mn)^i}{\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^{2+4j}(1-\rho)^j} \times$$

$$\times \left|\sin\frac{m\pi x}{\alpha} \cos\frac{n\pi y}{\beta}\right| + \frac{\alpha^2}{\pi^3}\cdot\max|\psi| B_0 \left[\frac{\alpha^3\beta^3}{\pi^4(l+p)}\right]^{j-1} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} m^{j-3} \left\{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{H_{ml}(1-\cos l\pi) l^{j-2} K_{ml}^{j-1}}{\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+l^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^{4j}(1-\rho)^j}\right\}\left|\sin\frac{m\pi x}{\alpha}\right| \quad (j=1, 2, 3, \ldots),$$

где введены следующие обозначения:

$$A_0 = \frac{4\alpha^2\beta^2 \max|Z|}{\pi^6}, \quad B_0 = \frac{\alpha^3\cdot\beta^3 \max\{\max|\eta|;\ \max|\zeta|\}}{\pi^5(1+p)},$$

$$H_{mn} = \left[\frac{m}{\alpha} E_{mn} + \frac{n}{\beta} D_{mn}\right],$$

$$F_{mn} = \left\{\left[\max|f|\cdot\frac{\pi}{\alpha} + \max|\varphi|\right]\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+(1+p)n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]\frac{m^2}{n\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{p\cdot n^3}{\beta}\left[\max|\psi| + \frac{\pi}{\beta}\max|g|\right]\right\},$$

$$G_{mn} = \left\{\left[\max|\psi| + \frac{\pi}{\beta}\max|g|\right]\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)(1+p)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]\frac{m}{\beta} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\pi}{\alpha}\max|f| + \max|\varphi|\frac{pmn^2}{\alpha}\right]\right\},$$

$$K_{mn} = \left[\max|\eta|\frac{m}{\alpha}F_{mn} + \max|\zeta|\frac{n}{\beta}G_{mn}\right].$$

Полученные ряды (11), (12), (13) и (14) являются членами соответствующих функциональных рядов (6).

Просуммировав соответствующие ряды, получим оценки для искомых функций:

$$|u| \leqslant |u_0| + \sum_{j=1}^{\infty} |u_{2j-1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |u_{2j}|,$$

$$|v| \leqslant |v_0| + \sum_{j=1}^{\infty} |v_{2j-1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |v_{2j}|,$$

$$|\omega| \leqslant |\omega_0| + \sum_{j=0}^{\infty} |\omega_{2j}| + \sum_{j=1}^{\infty} |\omega_{2j-1}|,$$

которые будут сходиться, если выполнено условие

$$\bar{\rho} = \sup \left\{ \frac{\alpha^3 \cdot \beta^3 \cdot m \cdot n K_{mn}}{\pi^4 (1+p)(1-\rho)\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^4} \right\} < 1.$$

Тогда получаем

$$|\omega| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{mn}}{(1-\rho)(1-\bar{\rho})\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^2} \left| \sin\frac{m\pi x}{\alpha} \sin\frac{n\pi y}{\beta} \right|,$$

$$|u| \leqslant |u_0| + \frac{\alpha\beta}{\pi(1+p)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{mn} \cdot F_{mn} \cdot mn \left| \cos\frac{m\pi x}{\alpha} \sin\frac{n\pi y}{\beta} \right|}{(1-\rho)(1-\bar{\rho})\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^4} +$$

$$+ \frac{\beta^2}{\pi^3} \max|\varphi| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\sin\frac{n\pi y}{\beta}\right|}{n^2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_{kn}(1-\cos k\pi)}{(1-\rho)(1-\bar{\rho})k\left[k^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^2} \right\},$$

$$|v| \leqslant |v_0| + \frac{\alpha\beta}{\pi(1+p)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{mn} G_{mn}\, mn \left| \sin\frac{m\pi x}{\alpha} \cos\frac{n\pi y}{\beta} \right|}{(1-\rho)(1-\bar{\rho})\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^4} +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{\pi^3} \max|\psi| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left|\sin\frac{m\pi x}{\alpha}\right|}{m^2} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{R_{ml}(1-\cos l\pi)}{(1-\rho)(1-\bar{\rho})\, l\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + l^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^2} \right\},$$

где

$$R_{mn} = \left\{ \frac{A_0(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)}{mn} + \frac{B_0 H_{mn}}{\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^2} \right\}.$$

Полученные результаты можем сформулировать в виде следующих теорем.

**Теорема 1.** *Краевая задача для уравнения эллиптического типа*

$$\Delta\Delta\omega + \xi(x, y) \cdot \omega = Z(x, y),$$

*с краевыми условиями*

$$\omega(0, y) = \omega(\alpha, y) = \omega(x, 0) = \omega(x, \beta) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0 \\ x=\alpha}} = \left.\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right|_{\substack{y=0 \\ y=\beta}} = 0,$$

*на контуре прямоугольной области имеет решение, если площадь упомянутой области ограничена следующим выражением:*

$$\alpha\cdot\beta<\inf\left\{\frac{\pi^2\cdot\left[m^2\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]}{\sqrt{\max|\xi|}}\right\}.$$

**Теорема 2.** *Краевая задача для системы уравнений эллиптического типа*

$$\Delta u+p\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+f(x,\ y)\cdot\omega+\varphi(x,\ y)\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}=F(x,\ y),$$

$$\Delta v+p\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+g(x,\ y)\cdot\omega+\psi(x,\ y)\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}=G(x,\ y),$$

$$\Delta\Delta\omega+\xi(x,\ y)\cdot\omega+\eta(x,\ y)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\zeta(x,\ y)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=Z(x,\ y),$$

*с краевыми условиями на контуре прямоугольной области*

$$v(0,\ y)=v(\alpha,\ y)=0,\quad \omega(0,\ y)=\omega(\alpha,\ y)=0,$$

$$u(x,\ 0)=u(x,\ \beta)=0,\quad \omega(x,\ 0)=\omega(x,\ \beta)=0,$$

$$\left.\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\x=\alpha}}=\left.\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right|_{\substack{y=0\\y=\beta}}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\x=\alpha}}=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\substack{y=0\\y=\beta}}=0,$$

*имеет решение в том случае, если площадь области ограничена величиной*

$$\alpha\cdot\beta\leqslant\min(\alpha_1\beta_1;\ \alpha_2\beta_2),$$

*где*

$$\alpha_1\beta_1<\inf\left\{\frac{\pi^2\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]}{\sqrt{\max|\xi|}}\right\},$$

$$\alpha_2\cdot\beta_2<\inf\left\{\pi^2\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^2\sqrt{\frac{(1+p)(1-\rho)}{mn\left[\max|\eta|\,\tilde{F}_{mn}+\max|\zeta|\,\tilde{G}_{mn}\right.}}\right\},$$

$$\tilde{F}_{mn}=\left\{\frac{m^3}{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)[\max|f|\,\pi+\max|\varphi|]\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1+p)n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]+pn^3m[\max|\psi|+\pi\max|g|]\right\},$$

$$\tilde{G}_{mn}=\left\{mn\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)[\max|\psi|+\pi\max|g|]\left[m^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)(1+p)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+n^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]+[\pi\max|f|+\max|\varphi|]pm^2n^2\right\}.$$

Примененный метод решения указан доц. Стрелицем Ш. П., за что автор статьи его благодарит.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
27.IX.1966

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Канторович, В. И. Крылов, «Приближенные методы высшего анализа», 1949, стр. 87.
2. В. З. Власов, «Общая теория оболочек», 1949.

**ELIPSINIO TIPO LYGČIŲ SISTEMOS SPRENDIMAS**

V. ŠILERIS

*(Reziumė)*

Šiame darbe nagrinėjamas (1)—(2) elipsinio tipo lygčių sistemos sprendinių egzistencijos klausimas.

**DIE LÖSUNG EINER ELLIPTISCHEN GLEICHUNGSYSTEM**

V. SCHILERIS

*(Zusammenfassung)*

In der vorliegendent Arbeit untersuchen wir die Existenz von Lösungen das elliptischen Gleichungssystems (1)—(2).

---