IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
1969

УДК – 519.21

О НЕСТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В. А. Ивницкий

Большинство систем массового обслуживания, рассмотренных в литературе, исследовалось в установившемся режиме [1], [2]. Представляет несомненный теоретический и практический интерес исследование и нестационарных режимов различных систем массового обслуживания. Однако за исключением случая пуассоновского потока и экспоненциально-распределенного времени обслуживания, подробно исследованного в [2], и случая критической загрузки, имеется сравнительно немного статей, посвященных этому вопросу. Среди них в первую очередь следует отметить статью Рэйча [3], в которой исследовался нестационарный режим для времени ожидания при нестационарном пуассоновском потоке. Для пуассоновского потока соответствующий результат приведен в [1]. Учет неординарности и времени, необходимого на „разогрев" обслуживающего прибора для нестационарного случая произведен в [4]. Для однолинейной системы с пальмовским потоком и экспоненциально распределенным временем обслуживания нестационарное распределение длины очереди найдено в [5].

В настоящей работе исследуется нестационарное распределение длины очереди однолинейной системы с пуассоновским потоком и произвольно распределенной длительностью обслуживания.

Имеется однолинейная система массового обслуживани. На вход поступает пуассоновский поток с параметром λ. Время обслуживания имеет произвольное распределение $H(x)$ с математическим ожиданием τ. Обозначим через $\nu(t)$ длину очереди в системе в момент времени t, причем обслуживающееся требование включается в очередь. Нужно определить распределение $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}\{\nu(t)=k\}$.

Составление и обоснование системы уравнений

Как обычно, вводим случайный процесс

$$\zeta(t)=\{\nu(t),\ \xi(t)\},$$

где $\xi(t)$ – время с момента t до момента окончания обслуживания требования, обслуживаемого в этот момент времени.

Процесс $\zeta(t)$ будет кусочно-линейным марковским процессом [1]. При условии $\lambda\tau<1$ он обладает эргодическим распределением. Обозначим $\varphi_0(t) = P\{\nu(t)=0\}$, $\varphi_i(x, t)=P\{\nu(t)=i,\ \xi(t)<x\}$.

Введенные функции удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных, причем производные могут быть обобщенными [6]:

$$\varphi_0'(t)+\lambda\,\varphi_0(t)=\frac{\partial\varphi_1(0,\,t)}{\partial x}\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi_1(x,\,t)}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_1(x,\,t)}{\partial x}=$$
$$=-\lambda\varphi_1(x,\,t)-\frac{\partial\varphi_1(0,\,t)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2(0,\,t)}{\partial x}\,H(x)+\lambda\varphi_0(t)\,H(x), \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi_i(x,\,t)}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_i(x,\,t)}{\partial x}=$$
$$=-\lambda\varphi_i(x,\,t)-\frac{\partial\varphi_i(0,\,t)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{i+1}(0,\,t)}{\partial x}\,H(x)+\lambda\varphi_{i-1}(x,t) \tag{3}$$

с произвольно выбранными начальными условиями (сохраняющими вероятностный смысл)

$$\varphi_0(0)=\varphi_0^{(0)},\ \ \varphi_i(x,\,0)=\varphi_i^{(0)}(x),\ \ \varphi_i^{(0)}(\infty)=P_i^{(0)}.$$

Вывод этих уравнений аналогичен [1]. Приведем лишь их обоснование на примере уравнения (1). Пусть $\nu(t+h)=0$. Тогда либо $\nu(t)=0$ и за время h ни одно требование не поступило, либо $\nu(t)=1$ и за время h обслуживающееся требование должно было покинуть систему ($\nu(t)=1$, $\xi(t)<h$). Остальные события имеют вероятность порядка $o(h)$. Поэтому формула полной вероятности дает

$$\varphi_0(t+h)=(1-\lambda h)\,\varphi_0(t)+\varphi_1(h,\,t)+o(h)$$

или

$$\frac{\varphi_0(t+h)-\varphi_0(t)}{h}+\lambda\varphi_0(t)=\frac{\varphi_1(h,\,t)}{h}+o(1). \tag{4}$$

В предположении существования непрерывных производных $\varphi_0'(t)$ и $\dfrac{\partial\varphi_1(0,\,t)}{\partial x}$ при $h\to 0$ (4) переходит в (1). Применяя к (1) преобразование Лапласа при обозначениях

$$\tilde\varphi_0(u)=\int_0^\infty e^{-ut}\varphi_0(t)\,dt,\qquad \frac{\partial\tilde\varphi_i(0,\,u)}{\partial x}=\int_0^\infty e^{-ut}\,\frac{\partial\varphi_i(0,\,t)}{\partial x}\,dt,$$

получаем уравнение

$$u\tilde\varphi_0(u)+\lambda\tilde\varphi_0(u)=\frac{\partial\tilde\varphi_1(0,\,u)}{\partial x}+\varphi_0^{(0)}. \tag{5}$$

Можно уравнение (5) получить без предположения о существовании непрерывных производных, непосредственно применяя преобразование Лапласа к уравнению (4). Действительно,

$$\int_0^\infty e^{-ut}\varphi_0(t+h)\,dt=e^{uh}\left(\int_0^\infty e^{-ut}\varphi_0(t)\,dt-\int_0^h e^{-ut}\varphi_0(t)\,dt\right). \tag{6}$$

Применяя преобразование Лапласа к (4), получаем

$$\frac{e^{uh}\left(\tilde\varphi_0(u)-\int_0^h e^{-ut}\varphi_0(t)\,dt\right)-\tilde\varphi_0(u)}{h}+\lambda\tilde\varphi_0(u)=\int_0^\infty e^{-ut}\,\frac{\varphi_1(h,\,t)}{h}\,dt+o(1). \tag{7}$$

Предел левой части существует, а значит существует и предел правой части.

Этот предел обозначим

$$\tilde{d}_1(u) = \lim_{h\to\infty} \frac{\bar{\bar{\varphi}}_1(h,\ u)}{h},$$

где

$$\bar{\bar{\varphi}}_1(h,\ u) = \int_0^\infty e^{-ut}\varphi_1(h,\ t)\,dt.$$

Легко видеть, что

$$\tilde{d}_1(u) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-ut}\varphi_1(x,\ t)dt\Big|_{x=0}.$$

Надо доказать, что

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-ut}\varphi_1(x,\ t)\,dt\Big|_{x=0} = \int_0^\infty e^{-ut}\frac{\partial\varphi_1(0,\ t)}{\partial x}\,dt.$$

Известно [7, стр. 136], что если $\frac{\partial X(t,\ x)}{\partial x}$ почти всюду существует на прямой $(x_0,\ t)$, где x_0 — фиксировано, и

$$\left|\frac{X(t,\ x)-X(t,\ x_0)}{x-x_0}\right| \leqslant Y,$$

где Y интегрируема, то

$$\left(\frac{d}{dx}\int X(t,\ x)\,dt\Big|_{x=x_0} = \left(\int \frac{\partial X(t,\ x)}{\partial x}\,dt\right)\Big|_{x=x_0}.$$

Как показано в [1. стр. 273], $\varphi_0'(t)$ существует почти всюду и конечна.

Из (4) следует, что $\frac{\partial\varphi_1(0,\ t)}{\partial x}$ $\left(\text{а также и } e^{-ut}\frac{\partial\varphi_1(0,\ t)}{\partial x}\right)$ существует и конечна почти всюду на $(0,\ \infty)$. Из (4) следует также, что

$$\left|e^{-ut}\frac{\varphi_1(h,\ t)}{h}\right| \leqslant \lambda\left|e^{-ut}\varphi_0(t)\right| + \left|e^{-ut}\frac{\varphi_0(t+h)-\varphi_0(t)}{h}\right| + o(1).$$

Как первое, так и второе слагаемое в левой части (4) интегрируемы с весовой функцией e^{-ut}, как видно из (7), а, значит, интегрируемы и их модули, т.е. выполнено условие того, чтобы можно было выносить операцию дифференцирования интеграла по параметру из-под знака интеграла. Следовательно,

$$\tilde{d}_1(u) = \frac{\partial\bar{\varphi}_1(0,\ u)}{\partial x}.$$

Устремляя $h\to 0$, получаем

$$u\bar{\varphi}_0(u) + \lambda\bar{\varphi}_0(u) = \frac{\partial\bar{\varphi}_1(0,\ u)}{\partial x} + \varphi_0^{(0)},$$

что совпадает с (5).

Рассматривая возможность осуществления события $\nu(t+h)=1$, $\xi(t)<x$ аналогично [1], приходим к разностному уравнению:

$$\varphi_1(x,\ t+h)=(1-\lambda h)\Big(\varphi_1(x+h,\ t)-\varphi_1(h,\ t)\Big)+$$

$$+\varphi_2(h,\ t)\ H(x)+\lambda h\varphi_0(t)\ H(x)+o(h)$$

или

$$\frac{\varphi_1(x,\ t+h)-\varphi_1(x,\ t)}{h}-\frac{\varphi_1(x+h,\ t)-\varphi_1(x,\ t)}{h}=$$

$$=-\lambda\varphi_1(x,\ t)-\frac{\varphi_1(h,\ t)}{h}+\frac{\varphi_2(h,\ t)}{h}\ H(x)+\lambda\varphi_0(t)\ H(x)+o(1).$$

Применим к этому уравнению двойное преобразование Лапласа, обозначив

$$\tilde{\varphi}_i(s,\ u)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-ut}\,\varphi_i(x,\ t)\,dxdt \quad \text{и} \quad \tilde{h}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dH(x),$$

$$\frac{e^{uh}\left[\tilde{\varphi}_1(s,\ u)-\int\limits_0^\infty e^{-sx}\int\limits_0^h e^{-ut}\varphi_1(x,\ t)\,dtdx\right]-\tilde{\varphi}_1(s,\ u)}{h}-$$

$$-\frac{e^{sh}\left[\tilde{\varphi}_1(s,\ u)-\int\limits_0^h\int\limits_0^\infty e^{-sx-ut}\varphi_1(x,\ t)\,dtdx\right]-\tilde{\varphi}_1(s,\ u)}{h}=$$

$$=-\lambda\varphi_1(s,\ u)-\frac{1}{sh}\int_0^\infty e^{-ut}\varphi_1(h,\ t)\,dt+$$

$$+\frac{\tilde{h}(s)}{sh}\int_0^\infty e^{-ut}\varphi_2(h,\ t)\,dt+\lambda\tilde{\varphi}_0(u)\ \frac{\tilde{h}(s)}{s}+o(1).$$

Аналогично предыдущему показывается, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-ut}\varphi_2(h,\ t)\,dt=\frac{\partial\tilde{\varphi}_2(0,\ u)}{\partial x}.$$

При $h\to 0$ получаем уравнение

$$(u-s+\lambda)\,\tilde{\varphi}_1(s,\ u)=-\frac{1}{s}\ \frac{\partial\tilde{\varphi}_1(0,\ u)}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{\varphi}_2(0,\ u)}{\partial x}\ \frac{\tilde{h}(s)}{s}+$$

$$+\lambda\tilde{\varphi}_0(u)\ \frac{\tilde{h}(s)}{s}+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(s), \tag{8}$$

где

$$\tilde{\varphi}_1^{(0)}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\varphi_1^{(0)}(x)\,dx.$$

Такое же уравнение получается при применении двойного преобразования Лапласа к (2) в предположении непрерывности соответствующих производных. Далее по индукции доказывается, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^{\infty} e^{-ut}\,\varphi_i(h,\ t)\,dt=\frac{\partial\tilde{\varphi}_i(0,\ u)}{\partial x}=\int_0^{\infty} e^{-ut}\,\frac{\partial\varphi_i(0,\ t)}{\partial x}\,dt$$

и совпадение уравнений для преобразований Лапласа, полученных из (3) при аналитических предпосылках и из разностного уравнения при $h\to 0$ без них. Уравнение для преобразований Лапласа при $i>1$ имеет вид:

$$(u-s+\lambda)\,\tilde{\varphi}_i(s,\ u)=-\frac{1}{s}\ \frac{\partial\tilde{\varphi}_i(0,\ u)}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial\tilde{\varphi}_{i+1}(0,\ u)}{\partial x}\ \frac{\tilde{h}(s)}{s}+\lambda\tilde{\varphi}_{i-1}(s,\ u)+\tilde{\varphi}_i^{(0)}(s). \qquad (9$$

Таким образом, (5, 8, 9) могут быть получены двумя способами с предположением о существовании непрерывных производных и без этого предположения. Это несоответствие, как указал И. Н. Коваленко [1], устраняется при помощи обобщенных функций [6]. Можно считать, что уравнения (1—3) справедливы всегда, но не в обычном, а в обобщенном смысле. Если уравнения, полученные при определенных аналитических условиях, относительно входящих в них функций (непрерывность, существование производных), приводят к уравнениям для преобразований Лапласа, то последние сохраняют смысл и в более общем случае, когда исходные аналитические предпосылки не выполняются. Отсюда следует, что при выводе дифференциальных уравнений можно пользоваться аналитическими предпосылками о функциях, не заботясь об их обосновании и далее решать их с применением преобразования Лапласа. При этом то, что решение системы дифференциальных уравнений может иметь обобщенный смысл, отразится в различного рода особенностях при обращении преобразования Лапласа.

Таким образом, дифференциальные уравнения в частных производных (1—3) обоснованы в обобщенном смысле.

Решение системы уравнений

Как уже отмечалось, применяя к (1—3) преобразование Лапласа, получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&(u+\lambda)\,\tilde{\varphi}_0(u)=\frac{\partial\tilde{\varphi}_1(0,\ u)}{\partial x}+\varphi_0^{(0)},\\
&(u-s+\lambda)\,\tilde{\varphi}_1(s,\ u)=-\frac{1}{s}\ \frac{\partial\tilde{\varphi}_1(0,\ u)}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{\varphi}_2(0,\ u)}{\partial x}\ \frac{\tilde{h}(s)}{s}+\\
&+\lambda\tilde{\varphi}_0(u)\ \frac{\tilde{h}(s)}{s}+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(s),\\
&(u-s+\lambda)\,\tilde{\varphi}_i(s,\ u)=-\frac{1}{s}\ \frac{\partial\tilde{\varphi}_i(0,\ u)}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{\varphi}_{i+1}(0,\ u)}{\partial x}\ \frac{\tilde{h}(s)}{s}+\\
&+\lambda\tilde{\varphi}_{i-1}(s,\ u)+\tilde{\varphi}_i^{(0)}(s).
\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Эту систему можно решать методом производящих функций. Справедлива следующая

Теорема. *Преобразование Лапласа производящей функции $\tilde{\psi}(z, u)$ нестационарного распределения длины очереди определяется следующей формулой:*

$$\tilde{\psi}(z, u)=\frac{1}{u+\lambda(1-z)}\left[\psi^{(0)}(z)+\frac{1-z}{\tilde{h}\left(u+\lambda(1-z)\right)-z}\left(\tilde{h}\left(u+\lambda(1-z)\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\tilde{\varphi}_0(u)\left(u+\lambda(1-z)\right)-\varphi_0^{(0)}\right)-\left(u+\lambda(1-z)\right)\sum_{i=1}^{\infty}z^i\tilde{\varphi}_i^{(0)}\left(u+\lambda(1-z)\right)\right)\right], \quad (11)$$

где $\psi^{(0)}(z)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_i^{(0)}z^i$ *— производящая функция начального распределения длины очереди,*

$$\tilde{\varphi}_0(u)=\frac{\varphi_0^{(0)}}{u+\lambda-\lambda\tilde{\Gamma}(u)}+\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_i^{(0)}\left(u+\lambda-\lambda\tilde{\Gamma}(u)\right)\cdot\tilde{h}^{i-1}\left(u+\lambda-\lambda\tilde{\Gamma}(u)\right)$$

и $\tilde{\Gamma}(u)$ *— единственное аналитическое решение функционального уравнения*

$$\tilde{\Gamma}(u)=\tilde{h}\left(u+\lambda-\lambda\tilde{\Gamma}(u)\right)$$

при условии $\left|\tilde{\Gamma}(u)\right|\leqslant 1$ *в правой полуплоскости и вещественности при всех вещественных* $s\geqslant 0$.

Доказательство. Обозначим $\tilde{a}(z, s, u)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_i(s, u)z^i+\frac{\tilde{\varphi}_0(u)}{s}$,

$$\tilde{\psi}(z, u)=\sum_{i=0}^{\infty}\tilde{P}_i(u)z^i,\ \tilde{P}_i(u)=\int_0^{\infty}e^{-ut}P_i(t)\,dt,\ P_i(t)=\varphi_i(\infty, t),$$

$$\frac{\partial\tilde{a}(z, 0, u)}{\partial x}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial\tilde{\varphi}_i(0, u)}{\partial x}z^i.$$

Из (10) для $\tilde{a}(z, s, u)$ получаем следующее уравнение:

$$-\left(u-s+\lambda(1-z)\right)\tilde{a}(z, s, u)=\frac{1}{s}\ \frac{\partial\tilde{a}(z, 0, u)}{\partial x}\left(1-\frac{\tilde{h}(s)}{z}\right)-$$

$$-\frac{1}{s}\lambda\tilde{\varphi}_0(u)(1-z)\left(1-\tilde{h}(s)\right)- \quad (12)$$

$$-\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_i^{(0)}(s)z^i-\frac{\varphi_0^{(0)}}{s}+\tilde{\varphi}_0(u)-\frac{1}{s}\left(u\tilde{\varphi}_0(u)-\varphi_0^{(0)}\right)\left(1-\tilde{h}(s)\right)\cdot$$

$\tilde{a}(z, s, u)$ является аналитической функцией при $\operatorname{Re}\{s\}>0$ и $\operatorname{Re}\{u\}>0$. Следовательно, при $s=u+\lambda(1-z)$ левая часть (12) обращается в нуль. Из условия равенства нулю при $s=u+\lambda(1-z)$ и правой части (12) определяем $\frac{\partial\tilde{a}(z,0,u)}{\partial x}$.

$$\frac{\partial\tilde{a}(z,0,u)}{\partial x}=\frac{z}{\tilde{h}\left(u+\lambda(1-z)\right)-z}\left[\tilde{h}\left(u+\lambda(1-z)\right)\left(\tilde{\varphi}_0(u)\left(u+\lambda(1-z)\right)-\varphi_0^{(0)}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(u+\lambda(1-z)\right)\sum_{i=1}^{\infty}z^i\tilde{\varphi}_i^{(0)}\left(u+\lambda(1-z)\right)\right]. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получаем выражение для $\tilde{a}(z,s,u)$:

$$\tilde{a}(z,s,u)=\frac{1}{s\left(s-u-\lambda(1-z)\right)}\left\{\frac{z-\tilde{h}(s)}{\tilde{h}\left(u+\lambda(1-z)\right)-z}\left[\tilde{h}\left(u+\lambda(1-z)\right)\left(\tilde{\varphi}_0(u)\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(u+\lambda(1-z)\right)-\varphi_0^{(0)}\right)-\left(u+\lambda(1-z)\right)\sum_{i=1}^{\infty}z^i\tilde{\varphi}_i^{(0)}\left(u+\lambda(1-z)\right)\right]-$$
$$-\lambda\tilde{\varphi}_0(u)(1-z)\left(1-\tilde{h}(s)\right)-s\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_i^{(0)}(s)z^i-\varphi_0^{(0)}+s\tilde{\varphi}_0(u)-$$
$$\left.-\left(u\tilde{\varphi}_0(u)-\varphi_0^{(0)}\right)\left(1-\tilde{h}(s)\right)\right\}. \tag{14}$$

По тауберовой теореме $\lim_{s\to 0}s\tilde{a}(z,s,u)=\tilde{\psi}(z,u)$. Умножив (14) на s и перейдя к пределу при $s\to 0$, получим формулу для преобразования Лапласа производящей функции длины очереди в нестационарном режиме:

$$\times\tilde{\psi}(z,u)=\frac{1}{u+\lambda(1-z)}\left[\psi^{(0)}(z)+\frac{1-z}{\tilde{h}\left(u+\lambda(1-z)\right)-z}\left(\tilde{h}\left(u+\lambda(1-z)\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\tilde{\varphi}_0(u)\left(u+\lambda(1-z)\right)-\varphi_0^{(0)}\right)-\left(u+\lambda(1-z)\right)\sum_{i=1}^{\infty}z^i\tilde{\varphi}_i^{(0)}\left(u+\lambda(1-z)\right)\right)\right]. \tag{15}$$

Для $\tilde{\varphi}_0(u)$ при $\varphi_0^{(0)}=1$ известна формула [1]: $\tilde{\varphi}_0(u)=\frac{1}{u+\lambda-\lambda\tilde{\Gamma}(u)}$, где $\tilde{\Gamma}(u)$ — единственное аналитическое решение функционального уравнения $\tilde{\Gamma}(u)=\tilde{h}\left(u+\lambda-\lambda\tilde{\Gamma}(u)\right)$. Так как у нас другие начальные условия, то найдем $\tilde{\varphi}_0(u)$ в нашем случае, при этом используется другой метод. Функционирование системы происходит чередованием свободных периодов ($\nu(t)=0$) с функцией распределения $1-e^{-\lambda x}$ и периодов занятости ($\nu(t)=1$) с функцией распределения $\Gamma(x)$. Пусть $\xi(t)$ — время с момента t до окончания длящегося периода занятости. Процесс $\zeta(t)=\{\nu(t),\xi(t)\}$ будет марковским. Обозначим $P_0(t)=P\{\nu(t)=0\}$ и $\varphi_1(x,t)=P\{\nu(t)=1,\xi(t)<x\}$. $P_0(t)$ и $\varphi_1(x,t)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$P_0'(t)+\lambda P_0(t)=\frac{\partial\varphi_1(0,t)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial\varphi_1(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_1(x,t)}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi_1(0,t)}{\partial x}+\lambda P_0(t)\Gamma(x) \tag{16}$$

с начальными условиями $P_0(0)=\varphi_0^{(0)}$, $\varphi_1(x,\ 0)=D(x)$. Эта система уравнений также справедлива всегда в обобщенном смысле. Обозначим

$$\tilde P_0(u)=\int\limits_0^\infty e^{-ut}P_0(t)\,dt,\quad \tilde\Gamma(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,d\Gamma(x),$$

$$\tilde\varphi_1(s,\ u)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-sx-ut}\varphi_1(x,\ t)\,dx\,dt,\quad \tilde d(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dD(x),$$

$$\frac{\partial\tilde\varphi_1(0,\ u)}{\partial x}=\int\limits_0^\infty e^{-ut}\,\frac{\partial\varphi_1(0,\ t)}{\partial x}\,dt.$$

Применяя к (16) двойное преобразование Лапласа, имеем

$$(u+\lambda)\tilde P_0(u)=\frac{\partial\tilde\varphi_1(0,\ u)}{\partial x}+\varphi_0^{(0)},\tag{17}$$

$$(u-s)\,\tilde\varphi_1(s,\ u)=-\frac{1}{s}\,\frac{\partial\varphi_1(0,\ u)}{\partial x}+\frac{1}{s}\,\lambda\tilde P_0(u)\,\tilde\Gamma(s)+\frac{\tilde d(s)}{s}\ .\tag{18}$$

$\tilde\varphi_1(s,\ u)$ является аналитической функцией при $\mathrm{Re}\,\{s\}>0$ и $\mathrm{Re}\,\{u\}>0$. Следовательно, при $u=s$ обе части (18) равны нулю. Отсюда

$$\frac{\partial\tilde\varphi_1(0,\ u)}{\partial x}=\tilde d(u)+\lambda\tilde P_0(u)\ \tilde\Gamma(u).$$

Подставляя это в (17), находим $\tilde P_0(u)$:

$$P_0(u)=\frac{\varphi_0^{(0)}+\tilde d(u)}{u+\lambda-\lambda\tilde\Gamma(u)}\ .$$

Найдем $\tilde d(u)$ при начальных условиях системы (1–3). Период занятости при условии, что время обслуживания первого требования имеет функцию распределения $H_1(x)$, а последующих требований $-H(x)$, имеет следующую функцию распределения $\overline{G}(x)$:

$$\overline{G}(x)=\int\limits_0^x\sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda y}\,\frac{(\lambda y)^n}{n!}\ G_n(x-y)\,dH_1(y),$$

где

$$\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dG_n(x)=[\tilde\Gamma(s)]^n\quad\text{и}\quad\tilde\Gamma(s)=\tilde h\left(\lambda+s-\lambda\tilde\Gamma(s)\right).$$

Преобразование Лапласа–Стилтьеса $\overline{G}(x)$ равно $\tilde h_1\left(\lambda+s-\lambda\tilde\Gamma(s)\right)$, где $\tilde h_1(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dH_1(x)$. Отсюда $\tilde d(u)$ при начальных условиях системы (1–3) равно

$$\left(u+\lambda-\lambda\tilde\Gamma(u)\right)\sum_{i=1}^\infty\tilde\varphi_i^{(0)}\left(u+\lambda-\lambda\tilde\Gamma(u)\right)\cdot h^{i-1}\left(u+\lambda-\lambda\tilde\Gamma(u)\right).$$

Итак,

$$\tilde{\varphi}_0(u) = \tilde{P}_0(u) = \frac{\varphi_0^{(0)}}{u+\lambda-\lambda\tilde{\Gamma}(u)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i^{(0)} \left(u+\lambda-\lambda\tilde{\Gamma}(u)\right) \cdot \tilde{h}^{i-1}\left(u+\lambda-\lambda\tilde{\Gamma}(u)\right), \tag{19}$$

где

$$\tilde{\Gamma}(u) = \tilde{h}\left(\lambda+u-\lambda\tilde{\Gamma}(u)\right).$$

Умножая (11) на u и устремляя $u \to 0$, получаем известную формулу Поллачека – Хинчина:

$$\psi(z) = \frac{(1-\lambda\tau)(1-z)\tilde{h}\left(\lambda(1-z)\right)}{\tilde{h}\left(\lambda(1-z)\right)-z}.$$

При начальных условиях $\varphi_0^{(0)}=1$

$$\tilde{\psi}(z, u) = \frac{1}{u+\lambda(1-z)}\left[1+\frac{(1-z)\tilde{h}\left(u+\lambda(1-z)\right)\left(\tilde{\varphi}_0(u)\left(u+\lambda(1-z)\right)-1\right)}{\tilde{h}\left(u+\lambda(1-z)\right)-z}\right],$$

где

$$\tilde{\varphi}_0(u) = \frac{1}{u+\lambda-\lambda\tilde{\Gamma}(u)} \quad \text{и} \quad \tilde{\Gamma}(u) = \tilde{h}\left(u+\lambda-\lambda\tilde{\Gamma}(u)\right). \tag{20}$$

Определим, например, преобразование Лапласа математического ожидания длины очереди. Оно равно

$$\frac{\partial\tilde{\psi}(1, u)}{\partial z} = \frac{1}{u}\left(\frac{\lambda}{u}+\frac{\tilde{h}(u)\left(u\tilde{\varphi}_0(u)-\varphi_0^{(0)}\right)-u\sum\limits_{i=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_i^{(0)}(u)}{1-\tilde{h}(u)}\right). \tag{21}$$

В случае $\varphi_0^{(0)}=1$

$$\frac{\partial\tilde{\psi}(1, u)}{\partial z} = \frac{1}{u}\left(\frac{\lambda}{u}+\frac{\tilde{h}(u)\left(u\tilde{\varphi}_0(u)-1\right)}{1-\tilde{h}(u)}\right). \tag{22}$$

Москва

Поступило в редакцию
17.IV.1968

Литература

1. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко, Введение в теории массового обслуживания, Ф. М. 1966.
2. Т. Саати, Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, Сов. радио, 1965.
3. E. Reich, On an integrodifferential equation of Takács. I, Ann. Math. Statist., V. 29, 1958 p.p. 563–570.
4. А. А. Шахбазов, Э. Т. Самандаров, Об обслуживании неординарного потока, сб. Кибернетика – на службу коммунизму, 1964.
5. B. W. Conolly, Queueing at a single serving point with Group Arrival, I. Roy. Statist. Soc., Vol. 22, N 2, 1960, p.p. 285–298.
6. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Ф. М. 1959.
7. М. Лоэв, Теория вероятностей, ИЛ, 1962.

APIE VIENOS LINIJOS MASINIO APTARNAVIMO EILĖS ILGIO NESTACIONARŲ PASISKIRSTYMĄ

A. Ivnickis

(*Reziumė*)

Straipsnyje nagrinėjamas vienos linijos masinis aptarnavimas su įeinančiu Puasono srautu ir su laisvai pasiskirsčiusiu aptarnavimo laiku. Surandama eilės ilgio nestacionaraus pasiskirstymo generuojančios funkcijos Laplaso transformacija, kuri apibendrina žinomą stacionariam atvejui Poliačeko – Chinčino formulę.

ON THE NON – STATIONARY DISTRIBUTION OF THE LENGTH OF THE QUEUE OF THE SINGLE SERVER SYSTEM

A. Ivnickij

(*Summary*)

The paper is concerned with a single server system with Poisson entrance flow and arbitrar distributed service time. The Laplace transformation of the generating function for the non-stationary distribution of the length of gueue is calculated. This formula is a generalization of the well-known Pollaczek – Khintchine's formula in the stationary case.