УДК – 519.21

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ЧИСЛА ВОССТАНОВЛЕНИЙ

А. В. Нагаев

§ 1. Формулировка результатов

Пусть ξ_j, $j=1, 2, \ldots$, независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины. Образуем последовательность сумм $S_0=0$, $S_k=\xi_1+\quad+\xi_k$, $k=\overline{1, \infty}$. Пусть случайная величина ν_x определяется следующим образом: $\nu_x=n$, если $S_n<x$, а $S_{n+1}\geqslant x$. Естественно назвать случайную величину ν_x числом восстановлений за промежуток времени x. Пусть далее $M\xi_i=a$ и $D\xi_i=\sigma^2<\infty$. Хорошо известна интегральная предельная теорема для числа восстановлений (см., например, [1], стр. 322), в которой утверждается, что

$$P\left\{\frac{\nu_x-x/a}{\sqrt{x\sigma^2/a^3}}<u\right\}=\Phi(u)\Big(1+o(1)\Big) \tag{1}$$

равномерно по $|u|<U$, где

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv.$$

Нетрудно показать, что соотношение (1) выполняется равномерно по u, $-\infty<u<\infty$. Интегральная теорема подсказывает утверждение локальной предельной теоремы для случайной величины ν_x.

Теорема. *Пусть $M\xi_j=a$, $D\xi_j=\sigma^2<\infty$. Тогда при $x\to\infty$*

$$P\{\nu_x=n\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi x\sigma^2/a^3}}\,e^{-\frac{(n-x/a)^2}{2x\sigma^2/a^3}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

равномерно по n, $-\infty<n<\infty$.

Эта теорема доказывалась в работах [3]–[5] для случая решетчатых слагаемых ξ_j. Следует также заметить, что метод, применяемый в этой работе, позволяет получать и асимптотические разложения.

§ 2. Доказательство теоремы

Доказательство опирается на следующую основную лемму.

Основная лемма. *В наших условиях при $n\to\infty$*

$$P\{\nu_x=n\}=\frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi n}}\,e^{-\frac{(x-na)^2}{2n\sigma^2}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{2}$$

равномерно по x, $-\infty<x<\infty$.

Доказательство этой леммы мы отложим до § 3. Покажем пока, как, используя основную лемму, получить утверждение нашей теоремы. С этой целью рассмотрим по отдельности три случая:

1. $x-x^{\alpha}\leqslant na\leqslant x+x^{\alpha}$;
2. $na>x+x^{\alpha}$;
3. $na<x-x^{\alpha}$,

где $\frac{3}{4}<\alpha<1$.

1. В этом случае покажем прежде всего, что

$$e^{-\frac{(n-x/a)^2}{2n\sigma^2/a^2}}-e^{-\frac{(n-x/a)^2}{2x\sigma^2/a^3}}=o(1). \tag{3}$$

Если $|x-na|<\sqrt{x}\ln x$, то

$$\left|\frac{(n-x/a)^2}{n}-\frac{(n-x/a)^2}{x/a}\right|=\frac{(n-x/a)^2}{x/a}\left|1-\frac{x}{na}\right|=O\left(\frac{\ln^3 x}{\sqrt{x}}\right).$$

Отсюда немедленно следует утверждение (3). В случае, когда $\sqrt{x}\ln x<$ $<|x-na|<x^{\alpha}$, соотношение (3) выполняется тривиальным образом. Из равенств (2) и (3) сразу получаем

$$\sqrt{x}P\{\nu_x=n\}=\sqrt{n}\cdot\sqrt{\frac{x}{n}}\,P\{\nu_x=n\}=\frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-na)^2}{2n\sigma^2}}\sqrt{\frac{x}{n}}+o(1)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/a^3}}\,e^{-\frac{(n-x/a)^2}{2n\sigma^2/a^2}}+o(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/a^3}}\,e^{-\frac{(n-x/a)^2}{2x\sigma^2/a^3}}+o(1). \tag{4}$$

2. Здесь, ввиду основной леммы, имеем

$$\sqrt{x}P\{\nu_x=n\}=\sqrt{n}P\{\nu_x=n\}\cdot\sqrt{\frac{x}{n}}=O\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\,e^{-\frac{(x-na)^2}{2n\sigma^2}}\right)=o(1). \tag{5}$$

3. Наконец, в третьем случае имеем по определению случайной величины ν_x

$$\sqrt{x}P\{\nu_x=n\}=\sqrt{x}P\{S_n<x,\ S_{n+1}\geqslant x\}<\sqrt{x}P\{S_{n+1}\geqslant x\}=$$

$$=O\left(\frac{n\sqrt{x}}{(x-na)^3}\right)=O\left(nx^{\frac{1}{2}-2\alpha}\right)=O\left(x^{\frac{3}{2}-2\alpha}\right)=o(1). \tag{6}$$

Соотношения (5) и (6) могут быть переписаны следующим образом: при $x\to\infty$

$$\sqrt{x}P\{\nu_x=n\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/a^3}}\,e^{-\frac{(n-x/a)^2}{2x\sigma^2/a^3}}+o(1) \tag{7}$$

равномерно по x, $|x-na|>x^{\alpha}$, $\frac{3}{4}<\alpha<1$.

§ 3. Доказательство основной леммы (нерешетчатый случай)

Разобьем доказательство основной леммы на несколько частей, каждая из которых будет оформлена в виде отдельной леммы. Следует сказать, что леммы 1—5 представляют собой небольшую модификацию результатов работы [6]. Пусть

$$F_n(u)=P\{S_n<u\},\quad x_1=\frac{x-na}{\sigma\sqrt{n}}. \tag{8}$$

Лемма 1. *Пусть* ξ_j *имеют нерешетчатое распределение, причем* $M|\xi_j|^3<\infty$. *Пусть далее функция* $b(y)$ *абсолютно непрерывна и больше того,* $b(-\infty)=b(+\infty)=0$, *а*

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2|b'(y)|\,dy<\infty.$$

Тогда при $n\to\infty$

$$-\sqrt{2\pi n\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty} b(y)\,dF_n(x-y)=e^{-\frac{x_1^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} b(y)\,dy+o(1)$$

равномерно по x, $-\infty<x<\infty$.

Доказательство. По теореме Крамера – Эссеена (см., например, [2], теорема 2, § 42, гл. 8) имеем равномерно по x и y

$$F_n(x-y)=\Phi\left(x_1-\frac{y}{\sigma\sqrt{n}}\right)+$$

$$+\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(x_1-\frac{y}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{Q\left(x_1-\frac{y}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{9}$$

где x_1 определяется равенством (8), а

$$Q(u)=\frac{\alpha_3}{6\sigma^3}(1-u^2),\quad \alpha_3=M(\xi_j-a)^3.$$

Интегрируя по частям, в силу свойств функции $b(y)$ получаем

$$-\sqrt{2\pi n\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty} b(y)\,dF_n(x-y)=\sqrt{2\pi n\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty} b'(y)F_n(x-y)\,dy. \tag{10}$$

Далее,

$$\Phi\left(x_1-\frac{y}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\Phi(x_1)-\frac{ye^{-\frac{x_1^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi n}}+\frac{\Theta(y)}{n}, \tag{11}$$

где

$$|\Theta(y)|\leqslant Cy^2,\quad C>0,$$

а

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(x_1-\frac{y}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{Q\left(x_1-\frac{y}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}=\frac{e^{-\frac{x_1^2}{2}}Q(x_1)}{\sqrt{2\pi n}}+\frac{\Theta_1(y)}{n}, \tag{12}$$

где

$$|\Theta_1(y)|<C|y|,\quad C>0.$$

Из соотношений (9) – (12) получаем

$$-\sqrt{2\pi n\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty} b(y)\,dF_n(x-y)=\sqrt{2\pi n\sigma^2}\,\Phi(x_1)\int_{-\infty}^{\infty} b'(y)\,dy+$$

$$+\sigma Q(x_1)e^{-\frac{x_1^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} b'(y)\,dy-e^{-\frac{x_1^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} yb'(y)\,dy+\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_2(y)b'(y)\,dy=$$

$$=-e^{-\frac{x_1^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} yb'(y)\,dy+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=e^{-\frac{x_1^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} b(y)\,dy+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где, как легко догадаться,

$$|\Theta_2(y)|<C(|y|+|y|^2), \quad C>0.$$

Нелишне также напомнить, что $b(-\infty)=b(+\infty)=0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть ξ нерешетчатая случайная величина, $M\xi=a_0$, $D\xi=\tau_0^2<\infty$. $\varphi(t)=Me^{it\xi}$. Пусть далее функция $\gamma(t)$ непрерывна. Тогда для любого фиксированного $K>0$ при $n\to\infty$*

$$\frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int\limits_{|t|<K} e^{-itx}\gamma(t)\varphi^n(t)\,dt=\frac{\gamma(0)}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_0^2}{2}}+o(1)$$

равномерно по x, $-\infty<x<\infty$, где

$$x_0=\frac{x-na_0}{\sigma_0\sqrt{n}}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_0^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx_0-\frac{t^2}{2}}\,dt. \tag{13}$$

Легко видеть что

$$\frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int\limits_{|t|<K} e^{-itx}\gamma(t)\varphi^n(t)\,dt=\frac{1}{2\pi\sigma_0}\int\limits_{|t|<K\sigma_0\sqrt{n}} e^{itx_0}\gamma\left(\frac{t}{\sigma_0\sqrt{n}}\right)\varphi_*^n(t)\,dt,$$

где

$$\varphi_k(t)=e^{-it\frac{a_0}{\sigma_0}\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{t}{\sigma_0\sqrt{n}}\right).$$

Далее, как обычно, имея в виду (13), записываем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|<K\sigma_0\sqrt{n}} e^{-itx_0}\gamma\left(\frac{t}{\sigma_0\sqrt{n}}\right)\varphi_*^n(t)\,dt-\frac{\gamma(0)}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx_0-\frac{t^2}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|<T} e^{-itx_0}\left[\gamma\left(\frac{t}{\sigma_0\sqrt{n}}\right)\varphi_*^n(t)-\gamma(0)e^{-\frac{t^2}{2}}\right]dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T<|t|<\varepsilon\sqrt{n}} e^{-itx_0}\gamma\left(\frac{t}{\sigma_0\sqrt{n}}\right)\varphi_*^n(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|>T}e^{-itx_0-\frac{t^2}{2}}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon\sqrt{n}<|t|<K\sigma_0\sqrt{n}} e^{-itx_0}\gamma\left(\frac{t}{\sigma_0\sqrt{n}}\right)\varphi_*^n(t)\,dt=I_1+I_2+I_3+I_4,$$

где интегралы пронумерованы в порядке их следования. Для оценки интегралов I_1-I_3 необходимо лишь слегка изменить обычные в таких случаях рассуждения (см., например, [2], гл. 8, § 47, теорема 1). При оценке интеграла I_4 следует лишь помнить, что $\sup\limits_{\varepsilon<|t|<K}|\varphi(t)|<1$. Проделывая эти несложные оценки, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\psi(t)$ характеристическая функция нерешетчатого распределения и к тому же $\psi(t)\geqslant 0$. Тогда при $n\to\infty$ для любого фиксированного $K>0$*

$$\sqrt{n}\int\limits_{|t|>K}\frac{\psi^n(t)\,dt}{1+t^4}=o(1).$$

Доказательство. Пусть случайная величина η соответствует характеристической функции $\psi(t)$. В условиях леммы распределение случайной величины η симметрично. Положим

$$\eta_T=\begin{cases}\eta, & \text{если } |\eta|\leqslant T,\\ 0, & \text{если } |\eta|>T,\end{cases}$$

где T – выбрано настолько большим, чтобы гарантировать нерешетчатость случайной величины η_T. Пусть далее $\psi_T(t)=Me^{it\eta_T}$. Ввиду симметричности распределения η, а, следовательно, и η_T, получаем

$$\psi(t)\leqslant\psi_T(t). \tag{14}$$

Пусть, далее,

$$b(y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ity}}{1+t^4}\,dt, \tag{15}$$

$$\frac{1}{1+t^4}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ity}\,b(y)\,dy. \tag{16}$$

Последовательным интегрированием по частям убеждаемся, что функция $y^2\,|b'(y)|$ интегрируема. Кроме того, $b(-\infty)=b(+\infty)=0$. Далее, симметричность η_T позволяет утверждать, что $M\eta_T=0$. Положим $\sigma_T^2=M\eta_T^2$, а

$$\psi_T^n(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ity}\,dG_n(y).$$

Поскольку $M|\eta_T|^3<\infty$, $b(-y)=b(y)$, то, полагая в лемме 1 $x=0$, $a=0$, $\sigma=\sigma_T$, $F_n(y)=G_n(y)$, получаем

$$\sqrt{2\pi n\sigma_T^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}b(y)\,dG_n(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}b(y)\,dy+o(1). \tag{17}$$

С другой стороны тождество Парсеваля дает нам

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}b(y)\,dG_n(y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_T^n(t)}{1+t^4}\,dt, \tag{18}$$

т.е. ввиду (17) и (16)

$$\frac{\sqrt{2\pi n\sigma_T^2}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_T^n(t)\,dt}{1+t^4}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}b(y)\,dy+o(1)=1+o(1). \tag{19}$$

Положим в лемме 2

$$x=0,\quad a_0=0,\quad \sigma_0=\sigma_T,\quad \varphi(t)=\psi_T(t),\quad \gamma(t)=\frac{1}{1+t^4}.$$

Получаем, что при любом фиксированном $K>0$

$$\frac{\sqrt{2\pi n\sigma_T^2}}{2\pi}\int\limits_{|t|<K}\frac{\psi_T^n(t)}{1+t^4}\,dt=1+o(1). \tag{20}$$

Из (14), (19) и (20) немедленно следует, что

$$\sqrt{n}\int\limits_{|t|>K}\frac{\psi^n(t)}{1+t^4}\,dt=o(1).$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть ξ_j имеют нерешетчатое распределение, а функция $g(y)$ финитна (т.е. бесконечно дифференцируема всюду и обращается в нуль вне некоторого промежутка). Тогда при $n\to\infty$ имеет место следующее асимптотическое представление равномерно по x, $-\infty<x<\infty$,*

$$-\sqrt{2\pi n\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(y)\,dF_n(x-y)=e^{-\frac{x_1^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(y)\,dy+o(1).$$

Заметим, что в лемме 4, в отличие от леммы 1, не требуется конечности момента третьего порядка.

Доказательство. Положим

$$\gamma(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ity}g(y)\,dy.$$

Интегрируя по частям, нетрудно установить, что

$$|\gamma(t)|\leqslant\frac{C}{1+t^4},\qquad C>0. \tag{21}$$

Запишем тождество Парсеваля

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(y)\,dF_n(x-y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma(t)f^n(t)e^{-itx}\,dt. \tag{22}$$

Заметим, что

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ity}\,dF_n(x-y)=e^{itx}f^n(-t).$$

По лемме 2 при любом фиксированном $K>0$ имеем, считая, что $\varphi(t)=f(t)$, $a=a_0$, $\sigma=\sigma_0$

$$\frac{\sqrt{2\pi n\sigma^2}}{2\pi}\int\limits_{|t|<K}\gamma(t)f^n(t)e^{-itx}\,dt=e^{-\frac{x_1^2}{2}}\gamma(0)+o(1)=$$

$$=e^{-\frac{x_1^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(y)\,dy+o(1). \tag{23}$$

Неравенство (21) дает нам

$$\frac{\sqrt{2\pi n\sigma^2}}{2\pi}\left|\int\limits_{|t|>K}\gamma(t)f^n(t)e^{-itx}\,dt\right|<C\sqrt{n}\int\limits_{|t|>K}\frac{|f(t)|^n}{1+t^4}\,dt.$$

Положим в лемме 3 $\psi(t)=|f(t)|^2$. Тогда из последнего неравенства получаем

$$\frac{\sqrt{2\pi n\sigma^2}}{2\pi}\int\limits_{|t|<K}\gamma(t)f^n(t)e^{-itx}dt=o(1). \tag{24}$$

Соотношения (22)—(24) приводят нас к утверждению леммы. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть ξ_j имеют нерешетчатое распределение. Тогда при любых фиксированных c_1 и c_2, $c_1<c_2$ при $n\to\infty$*

$$P\{x+c_1<S_n<x+c_2\}=\frac{e^{-\frac{x_1^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi n}}(c_2-c_1)+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

равномерно по x, $-\infty<x<\infty$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon>0$ произвольно малым. Положим далее

$$e(y)=\begin{cases}1, & y\in[c_1, c_2],\\ 0, & y\notin[c_1, c_2].\end{cases}$$

Пусть $g_m^{(1)}(y)\leqslant e(y)\leqslant g_m^{(2)}(y)$, причем $g_m^{(i)}(y)$, $i=1, 2$; $m=1, 2$, финитны, а при $m\to\infty$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}[g_m^{(2)}(y)-g_m^{(1)}(y)]\,dy=o(1).$$

Выберем m настолько большим, чтобы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}[g_m^{(2)}(y)-g_m^{(1)}(y)]\,dy<\varepsilon. \tag{25}$$

По лемме 4 можно выбрать n настолько большим, чтобы равномерно по x, $-\infty<x<\infty$ выполнялось неравенство

$$\left|-\sqrt{2\pi n\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_m^{(i)}(y)\,dF_n(x-y)-e^{-\frac{x_1^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_m^{(i)}(y)\,dy\right|<\varepsilon,\quad i=1, 2. \tag{26}$$

Из (26) получаем

$$e^{-\frac{x_1^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_m^{(1)}(y)\,dy-\varepsilon\leqslant-\sqrt{2\pi n\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e(y)\,dF_n(x-y)\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{x_1^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_m^{(2)}(y)\,dy+\varepsilon$$

или, имея ввиду (25),

$$\left|-\sqrt{2\pi n\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e(y)\,dF_n(x-y)-e^{-\frac{x_1^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e(y)\,dy\right|<2\varepsilon. \tag{27}$$

Остается лишь вспомнить определение функции $e(y)$ и что ε — произвольно малое число. Лемма доказана.

Приступим теперь к собственно доказательству основной леммы. По определению случайной величины ν_x имеем

$$P\{\nu_x=n\}=P\{S_n<x,\ S_{n+1}\geqslant x\}=-\int\limits_0^x P\{\xi_{n+1}>y\}\,dF_n(x-y). \tag{28}$$

Перепишем это равенство следующим образом:

$$P\{\nu_x=n\}=-\int_0^T P\{\xi_{n+1}>y\}\,dF_n(x-y)-$$

$$-\int_T^x P\{\xi_{n+1}>y\}\,dF_n(x-y)=I_1+I_2, \qquad T>0. \tag{29}$$

Пусть $\varepsilon>0$ — произвольно малое число, а T настолько велико, что при $y>T$

$$P\{\xi_{n+1}>y\}<\frac{\varepsilon}{1+y^2}.$$

Такой выбор осуществим, поскольку $M\xi_{n+1}^2<\infty$. Используя последнее неравенство и тождество Парсеваля, получаем

$$I_2<\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dF_n(y)}{1+(x-y)^2}=\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx-|t|}f^n(t)\,dt. \tag{30}$$

Далее,

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx-|t|}f^n(t)\,dt\right|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t|}|f(t)|^n\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt+o(1)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}+o(1). \tag{31}$$

Таким образом, из равенств (30) и (31) получаем для всех достаточно больших n

$$|\sqrt{n}\,I_2|<\frac{2\varepsilon}{\sigma\sqrt{2\pi}},$$

т.е. равномерно по x, $-\infty<x<\infty$,

$$I_2=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{32}$$

Оценим теперь интеграл I_1. Выберем две последовательности ступенчатых функций

$$G_m(y)=1-F\left(\frac{kT}{m}\right),\quad \frac{kT}{m}\leqslant y<\frac{(k+1)T}{m},$$

$$H_m(y)=1-F\left(\frac{(k+1)T}{m}\right),\quad \frac{kT}{m}\leqslant y<\frac{(k+1)T}{m},$$

где

$$F(y)=P\{\xi_{n+1}<y\}.$$

Очевидно, что

$$G_m(y)\geqslant H_m(y)$$

$$\int_0^T[G_m(y)-H_m(y)]\,dy=\frac{T}{m}\sum_{m=0}^{m-1}\left[F\left(\frac{(k+1)T}{m}\right)-F\left(\frac{kT}{m}\right)\right]\leqslant\frac{T}{m}. \tag{33}$$

Лемма 5 дает нам

$$-\sqrt{2\pi n\sigma^2}\int_{\frac{kT}{m}}^{\frac{(k+1)T}{m}}G_m(y)\,dF_n(x-y)=e^{-\frac{x_1^2}{2}}\left[1-F\left(\frac{kT}{m}\right)\right]\frac{T}{m}+o(1)$$

равномерно по k, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, и x, $-\infty < x < \infty$. Аналогично

$$-\sqrt{2\pi n\sigma^2} \int_{\frac{kT}{m}}^{\frac{(k+1)T}{m}} H_m(y)\,dF_n(x-y) = e^{-\frac{x_1^2}{2}} \left[1 - F\left(\frac{(k+1)T}{m}\right)\right] \frac{T}{m} + o(1).$$

Суммируя по k от нуля до $m-1$, получаем

$$-\sqrt{2\pi n\sigma^2} \int_0^T G_m(y)\,dF_n(x-y) = e^{-\frac{x_1^2}{2}} \int_0^T G_m(y)\,dy + o(1)$$

и

$$-\sqrt{2\pi n\sigma^2} \int_0^T H_m(y)\,dF_n(x-y) = e^{-\frac{x_1^2}{2}} \int_0^T H_m(y)\,dy + o(1)$$

равномерно по x, $-\infty < x < \infty$.

По определению функций $H_m(y)$ и $G_m(y)$ имеем

$$-\sqrt{2\pi n\sigma^2} \int_0^T H_m(y)\,dF_n(x-y) \leqslant -\sqrt{2\pi n\sigma^2} \int_0^T [1 - F(y)]\,dF_n(x-y) \leqslant$$
$$\leqslant -\sqrt{2\pi n\sigma^2} \int_0^T G_m(y)\,dF_n(x-y).$$

Следовательно, при всех достаточно больших n

$$e^{-\frac{x_1^2}{2}} \int_0^T H_m(y)\,dy - \varepsilon \leqslant -\sqrt{2\pi n\sigma^2} \int_0^T \big(1 - F(y)\big)\,dF_n(x-y) \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\frac{x_1^2}{2}} \int_0^T G_m(y)\,dy + \varepsilon,$$

или ввиду (33)

$$e^{-\frac{x_1^2}{2}} \int_0^T \big(1 - F(y)\big)\,dy - \frac{T}{m} - \varepsilon \leqslant -\sqrt{2\pi n\sigma^2} \int_0^T \big(1 - F(y)\big)\,dF_n(x-y) \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\frac{x_1^2}{2}} \int_0^T \big(1 - F(y)\big)\,dy + \frac{T}{m} + \varepsilon.$$

Выбор T уже сделан. Остается лишь выбрать m достаточно большим. Таким образом, равномерно по x, $-\infty < x < \infty$,

$$\sqrt{n}\, I_1 = \frac{e^{-\frac{x_1^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^T \big(1 - F(y)\big)\,dy + o(1).$$

Так как T произвольно велико, то, следовательно,

$$\sqrt{n}\, I_1 = \frac{e^{-\frac{x_1^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \big(1 - F(y)\big)\,dy + o(1)$$

равномерно по x, $-\infty < x < \infty$. Поскольку случайные величины ξ_j неотрицательны, то

$$\int_0^\infty \left(1 - F(y)\right) dy = M\xi_j = a$$

и, следовательно,

$$I_1 = \frac{a e^{-\frac{x_1^2}{2}}}{\sigma \sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{34}$$

равномерно по x, $-\infty < x < \infty$. Равенства (29), (32) и (34) доказывают основную лемму.

§ 4. Доказательство основной леммы (решетчатый случай)

В случае, когда случайные величины имеют решетчатое распределение, равенство (28) запишется следующим образом, если для удобства считать x целым,

$$P\{\nu_x = n\} = \sum_{k=0}^{x} P\{\xi_{n+1} \geq k\} P\{S_n = x - k\}. \tag{35}$$

если

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P\{\xi_{n+1} = k\},$$

то

$$\gamma(t) = \frac{1 - f(t)}{1 - e^{it}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P\{\xi_{n+1} \geq k\}. \tag{36}$$

В частности, $\gamma(0) = a$. Равенства (35) и (36) дают нам

$$P\{\nu_x = n\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(t) f^n(t) e^{-itx} dt. \tag{37}$$

Остается лишь повторить доказательство леммы 2. Основная лемма доказана.

Институт математики им. В. И. Романовского
Академии наук Узбекской ССР

Поступило в редакцию
19.XI.1969

Литература

1. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., 1964.
2. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.
3. С. В. Нагаев, Локальная предельная теорема для счетных цепей Маркова, Сб. Предельные теоремы теории вероятностей, Ташкент, 1963.
4. А. К. Алешкявичене, Локальная предельная теорема для рекуррентных событий, Лит. матем. сб., V, № 3 (1965), 373—380.
5. З. И. Шарагина, Локальные предельные теоремы для некоторых схем циклических процессов, Кандидатская диссертация.
6. L. A. Shepp, A local limit theorem, Ann. Math. Statist., v. 35, N 1, 1964.

LOKALINĖ RIBINĖ TEOREMA ATSTATYMŲ SKAIČIUI

A. Nagajevas

(*Reziumė*)

Įrodoma lokalinė ribinė teorema atstatymų skaičiui, kai laukimo laiko pasiskirstymas turi turėti baigtinį antrą momentą.

THE LOCAL LIMIT THEOREM FOR THE NUMBER OF RENEWALS

A. Nagaev

(*Summary*)

The local limit theorem for the number of renewals under condition that the second moment of lifetime distribution is finite is proved.