X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1970

УДК – 519.21

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ МАРКОВОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Б. ГРИГЕЛИОНИС

1. В настоящей работе будет доказан один специальный критерий марковости для случайных процессов с непрерывным временем, удобный для приложений в статистике частично наблюдаемых случайных процессов. В частности, пользуясь им, можно устанавливать марковость и достаточность определенных систем статистик от наблюдаемых случайных процессов с условно независимыми приращениями. Аналог этого критерия и его приложения в случае случайных процессов с дискретным временем получен в работе автора [1].

В п. 2 приведены необходимые определения, формулировка и доказательство исследуемого критерия марковости, а в п. 3 рассмотрены некоторые примеры.

2. Рассмотрим случайный процесс $(X(t),\ t\geqslant 0)$, принимающий значения в m-мерном евклидовом пространстве $(\mathscr{R}_m, \mathscr{B}_m)$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

Обозначим $\mathscr{F}_t$ – наименьшую σ-алгебру, порожденную случайными величинами $X(u)$, $0\leqslant u\leqslant t$, и $\mathscr{F}_s^t$ – наименьшую σ-алгебру, порожденную случайными величинами $X(u)-X(s)$, $s\leqslant u\leqslant t$.

Далее мы будем также рассматривать случайный процесс $(Y(t),\ t\geqslant 0)$, принимающий значения в измеримом пространстве $(\mathscr{Y}, \mathscr{B})$. Приведем ряд нужных нам определений.

Определение 1. *Говорим, что случайный процесс* $(Y(t),\ t\geqslant 0)$ *согласован с системой* σ*-алгебр* $\mathscr{F}_t$, $t\geqslant 0$, *если для всех* $t\geqslant 0$ *случайные величины* $Y(t)$ $\mathscr{F}_t$*-измеримы.*

Определение 2. *Случайный процесс* $(Y(t),\ t\geqslant 0)$ *называется транзитивным функционалом от процесса* $(X(t),\ t\geqslant 0)$, *если он согласован с системой* σ*-алгебр* $\mathscr{F}_t$, $t\geqslant 0$, *и для всех* $0\leqslant s<t$ *существует функция* $\varphi(y, s, t, \omega)$, *принимающая значения в* $\mathscr{Y}$, *такая, что почти всюду по мере* $\mathbf{P}$ (п. в.) *имеет место равенство*

$$Y(t)=\varphi(Y(s),\ s,\ t,\ \omega), \tag{1}$$

причем при фиксированных s, t *и* ω *функция* $\varphi(\cdot,\ s,\ t,\ \omega)$ $\mathscr{B}$ *– измерима, а при фиксированных* y, s *и* t *функция* $\varphi(y, s, t, .)$ $\mathscr{F}_s^t$*-измерима.*

Определение 3. *Говорим, что случайный процесс* $(Y(t),\ t\geqslant 0)$ *обладает марковским свойством относительно системы* σ*-алгебр* $\mathscr{F}_t$, $t\geqslant 0$, *если он согласован с этой системой и для всех* $0\leqslant s<t$ *и* $\Gamma\in\mathscr{B}$ *п. в.*

$$\mathbf{P}\{Y(t)\in\Gamma \mid \mathscr{F}_s\}=\mathbf{P}\{Y(t)\in\Gamma \mid Y(s)\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Если* $(Y(t),\ t\geqslant 0)$ — *транзитивный функционал от случайного процесса* $(X(t),\ t\geqslant 0)$, *а для всех* $0\leqslant s<t_i$ *и* $\Gamma_i\in\mathscr{B}_m$, $i=1, \quad n,\ n\geqslant 1$, *п. в.*

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\ \{X(t_1)-X(s)\in\Gamma_1,\ \ldots,\ X(t_n)-X(s)\in\Gamma_n \mid \mathscr{F}_s\}=\\&=\mathbf{P}\ \{X(t_1)-X(s)\in\Gamma_1, \quad X(t_n)-X(s)\in\Gamma_n \mid Y(s)\},\end{aligned} \tag{2}$$

то случайные процессы $\big(Y(t),\ t\geqslant 0\big)$ *и* $\Big(\big(X(t),\ Y(t)\big),\ t\geqslant 0\Big)$ *обладают марковским свойством относительно системы σ-алгебр* $\mathscr{F}_t$, $t\geqslant 0$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой ограниченной $\mathscr{B}_m\times\mathscr{B}$-измеримой функции $\psi(x,y)$ и для всех $0\leqslant s<t$ п. в.

$$\mathbf{E}\Big(\psi\big(X(t)-X(s),\ Y(t)\big)\mid\mathscr{F}_s\Big)=\mathbf{E}\Big(\psi\big(X(t)-X(s),\ Y(t)\big)\mid Y(s)\Big), \tag{3}$$

поскольку отсюда тогда очевидным образом получаем, что для любой ограниченной $\mathscr{B}_m\times\mathscr{B}_m\times\mathscr{B}$-измеримой функции $\psi(x,x',y)$ п. в.

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\Big(\psi\big(X(t)-X(s),\ X(s),\ Y(t)\big)\Big|\mathscr{F}_s\Big)=\\&=\mathbf{E}\Big(\psi\big(X(t)-X(s),\ X(s),\ Y(t)\big)\Big|\ X(s),\ Y(s)\Big)\end{aligned} \tag{4}$$

и, в частности, при $\psi(x,x',y)=\psi(x+x',y)$ п. в.

$$\mathbf{E}\Big(\psi\big(X(t),\ Y(t)\big)\Big|\mathscr{F}_s\Big)=\mathbf{E}\Big(\psi\big(X(t),\ Y(t)\big)\Big|\ X(s),\ Y(s)\Big). \tag{5}$$

При $\psi(x,y)=\chi_{\tilde\Gamma}(x,y)$*), $\tilde\Gamma\in\mathscr{B}_m\times\mathscr{B}$, из (5) следует, что для всех $0\leqslant s<t$ п. в.

$$\mathbf{P}\Big\{\big(X(t),\ Y(t)\big)\in\tilde\Gamma\Big|\mathscr{F}_s\Big\}=\mathbf{P}\Big\{\big(X(t),\ Y(t)\big)\in\tilde\Gamma\Big|\ X(s),\ Y(s)\Big\}, \tag{6}$$

а при $\psi(x,y)=\chi_\Gamma(y)$, $\Gamma\in\mathscr{B}$, из (3) вытекает, что для всех $0\leqslant s<t$ п. в.

$$\mathbf{P}\ \{Y(t)\in\Gamma\mid\mathscr{F}_s\}=\mathbf{P}\ \{Y(t)\in\Gamma\mid Y(s)\}. \tag{7}$$

Равенства (6) и (7) составляют утверждение теоремы.

Перейдем к доказательству равенства (3). В силу транзитивности функционала $(Y(t),\ t\geqslant 0)$ имеем, что п. в.

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\Big(\psi\big(X(t)-X(s),\ Y(t)\big)\Big|\mathscr{F}_s\Big)=\\&=\mathbf{E}\Big(\psi\Big(X(t)-X(s),\ \varphi\big(Y(s),s,t,\omega\big)\Big)\Big|\ \mathscr{F}_s\Big)=\\&=\mathbf{E}\Big(\tilde\psi\big(Y(s),\ s,\ t,\ \omega\big)\Big|\ \mathscr{F}_s\Big),\end{aligned} \tag{8}$$

где функция $\tilde\psi(y,s,t,\omega)$ при фиксированных s, t и ω $\mathscr{B}$-измерима, а при фиксированных y, s и t $\mathscr{F}_s^t$-измерима.

Обозначим $\mathscr{H}_s^t$ класс $\mathscr{F}_s^t$-измеримых ограниченных случайных величин Z, таких, что п. в.

$$\mathbf{E}\big(Z\mid\mathscr{F}_s\big)=\mathbf{E}\ \big(Z\mid Y(s)\big).$$

*) $\chi_\Gamma(x)=1$ при $x\in\Gamma$, $=0$ при $x\notin\Gamma$.

Очевидно, что $1 \in \mathcal{H}_s^t$, линейные комбинации любых двух случайных величин из $\mathcal{H}_s^t$ принадлежат $\mathcal{H}_s^t$ и если $Z_n \in \mathcal{H}_s^t$, $0 \leqslant Z_n \uparrow Z$, где Z – ограниченная случайная величина, то $Z \in \mathcal{H}_s^t$. Наконец, в силу предположения (2) классу $\mathcal{H}_s^t$ принадлежат характеристические функции системы множеств $\mathcal{C}_s^t$

$$\{X(t_1)-X(s) \in \Gamma_1, \qquad X(t_n)-X(s) \in \Gamma_n\},$$

где $\Gamma_i \in \mathcal{B}_m$, $s \leqslant t_i \leqslant t$, $i=1, \ldots, n$, $n \geqslant 1$, являющейся π-системой, т. е. для любых множеств A_1, $A_2 \in \mathcal{C}_s^t$ имеем, что $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{C}_s^t$. Из вышесказанного и леммы 1.2 в [2] следует, что классу $\mathcal{H}_s^t$ принадлежат все ограниченные $\mathcal{F}_s^t$-измеримые случайные величины.

Отсюда очевидным образом следует, что п. в.

$$\mathbf{E}\left(\tilde{\psi}\left(Y(s),\ s,\ t,\ \omega\right)\Big|\ \mathcal{F}_s\right)=\mathbf{E}\left(\tilde{\psi}\left(Y(s),\ s,\ t,\ \omega\right)\Big|\ Y(s)\right). \tag{9}$$

Из (8) и (9) имеем, что п. в.

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left(\psi\left(X(t)-X(s),\ Y(t)\right)\Big|\ Y(s)\right)=\\&=\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\psi\left(X(t)-X(s),\ Y(t)\right)\Big|\ \mathcal{F}_s\right)\Big|\ Y(s)\right)=\\&=\mathbf{E}\left(\tilde{\psi}\left(Y(s),\ s,\ t,\ \omega\right)\Big|\ Y(s)\right)\end{aligned} \tag{10}$$

Из равенств (8)–(10) вытекает (3) и тем самым теорема доказана.

3. Рассмотрим некоторые примеры. Пусть $(\vartheta(t),\ t \geqslant 0)$ – марковская цепь с конечным множеством состояний $(0,\ 1, \qquad N)$, начальным распределением $\pi_i=\pi_i(0)=\mathbf{P}\ \{\vartheta(0)=i\}$, $i=0,\ 1, \qquad N$, и переходными вероятностями $p_{ij}(s,\ t)=\mathbf{P}\ \{\vartheta(t)=j \mid \vartheta(s)=i\}$, $0 \leqslant s<t$, $i,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ N$. Предположим, что $(X(t),\ t \geqslant 0)$ – m-мерный стохастически непрерывный случайный процесс, при фиксированной траектории цепи $(\vartheta(t),\ t \geqslant 0)$ имеющий независимые приращения.

Обозначим

$$\pi_i(t)=\mathbf{P}\ \{\vartheta(t)=i \mid \mathcal{F}_t\}, \qquad i=0,\ 1, \qquad N.$$

При достаточно общих дополнительных предположениях относительно процесса $\left(X(t),\ t \geqslant 0\right)$ можно доказать, что функционал $Y(t)=\left(\pi_1(t), \ldots, \pi_N(t)\right)$, $t \geqslant 0$, транзитивен и выполняется условие (2). Здесь мы ограничимся лишь рассмотрением двух примеров, относящихся к байесовским решениям задачи Вальда проверки нескольких простых статистических гипотез о многомерном случайном процессе с независимыми приращениями и задачи о „разладке" многомерного случайного процесса с независимыми приращениями. (Подробнее о постановке и решении таких задач для винеровского процесса см. в [3].)

Пример 1. Пусть $\vartheta(t) \equiv \vartheta(0)$, $0<\pi_i<1$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ N$, и условные меры P_i, соответствующие процессу $\left(X(t),\ t \geqslant 0\right)$, при условии $\vartheta(0)=i$, $i=0,$ $1, \ldots, N$, эквивалентны между собой. Покажем, что функционал $Y\left(t\right)=(\pi_1(t),$ $\ldots,\ \pi_N(t))$, $t \geqslant 0$, удовлетворяет условиям теоремы п. 2.

Поскольку в силу принятых предположений для всех $0 \leqslant s < t_i$ и $\Gamma_i \in \mathscr{B}_m$, $i=1, \quad n, n \geqslant 1$, п. в.

$$\mathbf{P}\{X(t_1)-X(s)\in\Gamma_1, \quad X(t_n)-X(s)\in\Gamma_n \mid \mathscr{F}_s\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \mathbf{P}\{X(t_1)-X(s)\in\Gamma_1, \quad X(t_n)-X(s)\in\Gamma_n, \vartheta(0)=i \mid \mathscr{F}_s\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \mathbf{P}\{X(t_1)-X(s)\in\Gamma_1, \ldots, X(t_n)-X(s)\in\Gamma_n \mid \vartheta(0)=i\}\,\pi_i(s) \tag{11}$$

$$\pi_0(s) = 1 - \sum_{i=1}^{N} \pi_i(s), \tag{12}$$

то из (11) и (12) следует выполнимость условия (2).

Остается показать транзитивность функционала $\left(Y(t), t \geqslant 0\right)$. Имеем, что

$$\pi_j(t) = \frac{\pi_j \frac{dP_j}{dP_0}(X_0^t)}{\sum\limits_{i=0}^{N} \pi_i \frac{dP_i}{dP_0}(X_0^t)}, \quad j=0, 1, \quad N, \tag{13}$$

где X_s^t обозначает отрезок траектории $X(u)$, $s \leqslant u \leqslant t$.

Из (13) находим, что производные $\frac{dP_i}{dP_0}(X_0^t)$, $i=1, \quad N$, являются решением системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\pi_i \delta_{ij} - \pi_i \pi_j(t)\right) \frac{dP_i}{dP_0}(X_0^t) = \pi_0 \pi_j(t), \quad j=1, \ldots, N, \tag{14}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Поскольку п. в.

$$\det \| \pi_i \delta_{ij} - \pi_i \pi_j(t) \|_1^N = \pi_1 \quad \pi_N \pi_0(t) > 0,$$

то из (14) следует, что п. в.

$$\frac{dP_i}{dP_0}(X_0^t) = \varphi_i\left(Y(t)\right), \quad i=1, \quad , N, \tag{15}$$

где $\varphi_i(y)$ — определенные рациональные функции от компонент вектора y.

Далее, как известно (см. [4]), п. в.

$$\frac{dP_i}{dP_0}(X_0^t) = \frac{dP_i}{dP_0}(X_0^s)\,\frac{dP_i}{dP_0}(X_s^t), \quad i=1, \ldots, N, \tag{16}$$

где случайные величины $\frac{dP_i}{dP_0}(X_s^t)$ — $\mathscr{F}_s^t$-измеримы.

Из равенств (13), (15) и (16) следует транзитивность функционала $\left(Y(t), t \geqslant 0\right)$.

Пример 2. Пусть τ — неотрицательная случайная величина такая, что

$$\mathbf{P}\{\tau=0\} = \pi(0) < 1$$

$$\mathbf{P}\{\tau < t \mid \tau > 0\} = F(t).$$

Предположим, что m-мерный случайный процесс

$$X(t)=\begin{cases} X_0(t) & \text{при } 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ X_0(\tau)+X_1(t-\tau) & \text{при } t>\tau,\end{cases}$$

при каждом фиксированном значении τ является стохастически непрерывным случайным процессом с независимыми приращениями, меры P_i, соответствующие процессам $X_i(t)$, $i=0, 1$, эквивалентны, процесс $X_1(t)$ однороден по времени и $\mathbf{P}\{X_0(0)=0\}=\mathbf{P}\{X_1(0)=0\}=1$.

Обозначим

$$\vartheta(t)=\begin{cases} 0 \text{ при } t\leqslant\tau,\\ 1 \text{ при } t>\tau.\end{cases}$$

Очевидно, что $(\vartheta(t),\ t\geqslant 0)$ — марковская цепь с двумя состояниями, с начальным распределением $\pi_1=1-\pi_0=\pi(0)$ и переходными вероятностями

$$p_{00}(s,\ t)=1-p_{01}(s,\ t)=\frac{1-F(t)}{1-F(s)}$$

и

$$p_{11}(s,t)=1-p_{10}(s,t)\equiv 1.$$

Покажем, что функционал $Y(t)=\pi(t)$, $t\geqslant 0$, удовлетворяет условиям теоремы п. 2.

Выполнимость условия (2) проверяется аналогично примеру 1.

Для $t\geqslant 0$, таких, что $F(t)<1$, обозначим

$$\gamma(t)=\frac{\pi(t)}{1-\pi(t)}. \tag{17}$$

Имеем, что

$$\gamma(t)=\frac{\mathbf{P}\{\tau<t\mid\mathscr{F}_t\}}{\mathbf{P}\{\tau\geqslant t\mid\mathscr{F}_t\}}=\frac{1}{1-F(t)}\left[\frac{\pi(0)}{1-\pi(0)}\ \frac{dP_1}{dP_0}(X_0^t)+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\frac{dP_1}{dP_0}(X_u^t)\,dF(u)\right]=\frac{1}{1-F(t)}\ \frac{dP_1}{dP_0}(X_0^t)\left[\frac{\pi(0)}{1-\pi(0)}+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\frac{dP_0}{dP_1}(X_0^u)\,dF(u)\right]. \tag{18}$$

Мы пользовались тем, что

$$\frac{dP_1}{dP_0}(X_0^t)=\left[\frac{dP_0}{dP_1}(X_0^t)\right]^{-1} \tag{19}$$

Из (16), (18) и (19) при $0\leqslant s<t$, $F(t)<1$, находим, что

$$\gamma(t)=\gamma(s)\,\frac{1-F(s)}{1-F(t)}\ \frac{dP_1}{dP_0}(X_s^t)+\frac{1}{1-F(t)}\int_s^t\frac{dP_1}{dP_0}(X_u^t)\,dF(u). \tag{20}$$

Из равенств (17) и (20) и того, что $\pi(t)=1$ при $F(t)=1$, следует транзитивность функционала $(\pi(t),\ t\geqslant 0)$.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
3.X.1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Григелионис, Достаточность в задачах оптимальной остановки, Лит. матем. сб., IX, 3(1969), 471–480.
2. Е. Б. Дынкин, Основание теории марковских процессов, М., Физматгиз, 1959.
3. А. Н. Ширяев, О двух задачах последовательного анализа. Кибернетика, 2(1967), 79–86.
4. А. В. Скороход, Случайные процессы с независимыми приращениями, М., „Наука", 1964.

APIE VIENĄ MARKOVIŠKUMO KRITERIJŲ ATSITIKTINIAMS PROCESAMS

B. GRIGELIONIS

(*Reziumė*)

Darbe įrodytas markoviškumo kriterijus tolydinio laiko atsitiktiniams procesams, remiantis funkcionalo nuo duoto atsitiktinio proceso tranzityvumo sąvoka. Išnagrinėta keletas pavyzdžių susijusių su daugiamačių atsitiktinių procesų su nepriklausomais pokyčiais statistikos uždaviniais.

ON A CRITERION OF MARKOVITY FOR STOCHASTIC PROCESSES

B. GRIGELIONIS

(*Summary*)

In the paper a criterion of markovity for the stochastic processes with continuons time, based on the notion of the transitive functional from a given stochastic process, is proved. Some examples connected with statistical problems of multidimensional stochastic processes with the independent increments, are examined.