X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК–51 : 330.115

ОДНО ПРАВИЛО ГРУППОВОГО РЕШЕНИЯ

А. И. МОРКЕЛЮНАС

Групповое упорядочение альтернатив часто производится методом простого большинства. Если число альтернатив $m\geqslant 3$, а число индивидов $n\geqslant 2$, метод простого большинства иногда приводит к нетранзитивному групповому упорядочению. Если задача состоит в групповом выборе наилучшей (доминирующей) альтернативы, то правило простого большинства по упомянутой причине нетранзитивности опять не всегда приводит к выбору. Численная оценка таких случаев дана в [1]. Если в групповом профиле индивидуальные профили из $\mathscr{R}$ выбираются случайно и с одинаковыми вероятностями, то, как указано в [1], вероятность $P(m, n)$ несуществования доминирующей по большинству альтернативы возрастает при увеличении m или n. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} P(m, n)>0$ для любого конечного m.

В статье описывается правило, являющееся обобщением группового упорядочения по правилу простого большинства, а также обобщением группового выбора доминирующей по большинству альтернативы.

Пусть m – число альтернатив a_i $(m\geqslant 3)$, n – число индивидов $(n\geqslant 2)$. Профиль предпочтения R это полное квазиупорядочение множества $\{a_1, \ldots, a_m\}$ посредством рефлексивного и транзитивного отношения „$\succsim$“. Отношение $a_i\succsim a_j$ означает то же самое, что и $a_j\precsim a_i$. Предполагается, что „$\precsim$“ удовлетворяет следующему условию антисимметричности: $a_i\sim a_j$ тогда и только тогда, когда верно как $a_i\precsim a_j$, так и $a_j\precsim a_i$. Обозначим „$\sim$“ отношение эквивалентности. $a_i\sim a_j$ неверно тогда и только тогда, когда верно одно из двух: $a_i\succ a_j$ или $a_i\prec a_j$. Отношение „$\succ$“ иррефлексивное. Причем если $a_i\succ a_j$ и $a_j\succsim a_k$, то $a_i\succ a_k$. Действительно, если $a_i\succ a_j$, $a_j\succsim a_k$, то из транзитивности „$\succsim$“ следует $a_i\succsim a_k$. Пусть $a_i\sim a_k$. Тогда из $a_j\succsim a_k\sim a_i$ получаем $a_j\succsim a_i$. Следовательно $a_j\sim a_i$, что противоречит $a_i\succ a_j$.

Знак „$\sim$“ толкуется как равноценность альтернатив, „$\succ$“ – строгое предпочтение. Например, если $a_i\sim a_j$ или $a_i\succ a_j$, то a_i равноценно a_j, соответственно, a_i предпочтительнее a_j. Если $a_i\succsim a_j$, то говорят, что a_i не хуже a_j (или a_j не лучше a_i).

Обозначим множество профилей предпочтения через $\mathcal{R}$. Иногда будем писать $\mathcal{R}^{m}$, указывая на число альтернатив в профиле. Обозначим множество профилей, в которых никакие две альтернативы не эквивалентны через $\mathcal{R}_0$. Очевидно, $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$.

Конечный набор профилей предпочтения $\{R_1, \ldots, R_n\}$ будем называть групповым профилем и обозначать через $\mathcal{G}$. Если написано $\mathcal{G}_n$, то n указывает на число профилей предпочтения в $\mathcal{G}$ (число индивидов). Групповое решение — это профиль предпочтения $R \in \mathcal{R}$, каким-то образом зависящий от $\mathcal{G}$. Можно сказать, что решение — это отображение $R\,F$:

$$\mathcal{R} \times \quad \times \mathcal{R} \vec{F} \mathcal{R}.$$

Так как отображение, возможно, не однозначно, то через $\{R(\mathcal{G})\}$ обозначим множество решений. Знак строгого предпочтения будем пропускать и вместо $a_i \succ a_j$ писать $a_i a_j$.

Ограничимся сначала рассмотрением $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$. Введем следующие обозначения:

$$t_i^j(R_s, R_p) = \begin{cases} 1, \text{ если между } a_i \text{ и } a_j \text{ как в } R_s, \text{ так и в } R_p \text{ знаки} \\ \text{строгого предпочтения и они совпадают,} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{1}$$

$$t_i^i = 0.$$

Если $R_s \in \mathcal{G}$, то, указывая этот факт, будем писать $t_i^j(R_s, R_p, \mathcal{G})$. Но, если это не вызывает недоумения, $\mathcal{G}$ не пишем. Чтобы укоротить запись, будем употреблять:

$$t_i^j(R_s, R_p) = t_{jp}^{js}.$$

Иногда вместо R_p будем писать просто R. Тогда

$$t_i^j(R_s, R) = t_i^{js}(R) = t_i^{js}.$$

Заметим, что из (1) следует:

$$t_{ip}^{js} = t_{jp}^{is} = t_{js}^{ip}.$$

Мы будем проводить суммирование $t_{ip}^{js}(\mathcal{G})$, но только по индексам i, j, s. Для обозначений сумм употребляется буква без того индекса, по которому происходило суммирование. Например:

$$t_{ip}^{j}(\mathcal{G}) = \sum_{s=1}^{n} t_i^{js}(\mathcal{G}), \qquad \mathcal{G} = \{R_1, \quad R_n\}.$$

Везде здесь полагается, что $R_s \in \mathcal{G}$, т. е.

$$\sum_{s=1}^{n} t_{ip}^{js} = \sum_{R_s \in G} t_{ip}^{j}(R_s),$$

Кроме того:

$$T(R, \mathcal{G}) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} t_i^{js}(R).$$

Обозначим:

$$\{R_0(\mathcal{G})\} = \{R' \cdot \max_{R \in R_0} T(R,\ \mathcal{G}) = T(R',\ \mathcal{G})\}.$$

Определение 1. $R' \in \mathcal{R}_0$ называется групповым R_0-решением для $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$ тогда и только тогда, когда $R' \in \{R_0(\mathcal{G})\}$.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих введение обозначения и определение 1.

Пример 1. Пусть $\mathcal{G} = \{R_1,\ R_2,\ R_3\}$ и

$R_1 = a_1a_2a_3$ или то же самое $a_1 \succ a_2 \succ a_3$,

$R_2 = a_3a_1a_2$,

$R_3 = a_2a_3a_1$.

Легко подсчитать, что

$$\max_{R \in R_0} T(R, \mathcal{G}) = \max \sum_{s=1}^{3} \sum_{i,j=1}^{3} t_i^{js}(R) = T(R_1) = T(R_2) = T(R_3) = 10$$

и проверить, что $\{R_0(\mathcal{G})\} = \{R_1,\ R_2\ R_3\}$.

Пример 2. Пусть $\mathcal{G} = \{R_1,\ R_2,\ R_3\}$ и

$R_1 = a_1a_2a_4a_3$,

$R_2 = a_3a_1a_2a_4$,

$R_3 = a_2a_4a_3a_1$.

Покажем, что $\{R_0(\mathcal{G})\} = \{a_1a_2a_4a_3\}$, т. е.

$$\max_{R \in R_0} T(R,\ \mathcal{G}) = T(R_1,\ \mathcal{G}).$$

Действительно, если вычеркнуть альтернативу a_3, то получим профиль $\mathcal{G}' \subset \mathcal{R}_0^3$ и

$R_1' = a_1a_2a_4$,

$R_2' = a_1a_2a_4$,

$R_3' = a_2a_4a_1$.

Легко убедиться, что $\{R_0(\mathcal{G}')\} = \{a_1a_2a_4\}$.

Обозначим через $\{(a_i,\ a_j,\ a_k)\}$ множество перестановок альтернатив a_i, a_j, a_k, т. е.

$$\{(a_i,\ a_j,\ a_k)\} = \{a_ia_ja_k,\ a_ka_ia_j,\ a_ka_ja_i,\ \ldots\}.$$

Будем предполагать, что $(a_i,\ a_j,\ a_k)$ любой представитель из $\{a_i,\ a_j,\ a_k)\}$.

Поскольку $a_1a_2a_4$ — единственное R_0-решение для $\mathcal{G}'$, то:

$$T(a_1a_2a_4a_3,\ \mathcal{G}) > T((a_1,\ a_2,\ a_4)\,a_3),\ (a_1,\ a_2,\ a_4) \neq a_1a_2a_4; \qquad (а)$$

$$T\Big(a_3a_1a_2a_4,\ \mathcal{G}) > T(a_3\,(a_1,\ a_2,\ a_4)\Big),\ (a_1,\ a_2,\ a_4) \neq a_1a_2a_4. \qquad (б)$$

Нетрудно проверить, что

$$T(a_1a_2a_4a_3) > T(a_3a_1a_2a_4). \qquad (в)$$

Если вычеркнуть альтернативу a_1, то для профиля $\mathcal{G}''=\{R_1'', R_2'', R_3''\}\subset\mathcal{R}_0^3$:

$$R_1''=a_2a_4a_3,$$

$$R_2''=a_3a_2a_4,$$

$$R_3''=a_2a_4a_3,$$

групповым решением может быть только $a_2a_4a_3$. Отсюда

$$T\Big(a_1a_2a_4a_3\Big)>T\left(a_1\left(a_2,\ a_4,\ a_3\right)\right),\ (a_2,\ a_4,\ a_3)\neq a_2a_4a_3, \tag{г}$$

$$T\left(a_2a_4a_3a_1\right)>T\ \left(\left(a_2,\ a_4,\ a_3\right)a_1\right),\ (a_2,\ a_4,\ a_3)\neq a_2a_4a_3. \tag{д}$$

Имеем также

$$T\left(a_1a_2a_4a_3\right)>T\left(a_2a_4a_3a_1\right). \tag{л}$$

Поскольку $t_3^1(R)>t_3^1(R')$, где $R=\ \dots\ a_3a_1\ \dots$, а R' отличается от R только перестановкой a_1 и a_3, то из (а)—(л) получаем, что в $\{R_0(\mathcal{G})\}$ могут быть только R:

1) $R=a_1a_2a_4a_3$,

2) $R=a_2a_3a_1a_4$,

3) $R=a_4a_3a_1a_2$.

Из примера 1 и (г) видно, что

$$T\left(a_2a_3a_1a_4\right)=T\left(a_1a_2a_3a_4\right)<T\left(a_1a_2a_4a_3\right).$$

Из (а) и примера 1 следует

$$T\left(a_4a_3a_1a_2\right)=T\left(a_4a_1a_2a_3\right)<T\left(a_1a_2a_4a_3\right).$$

Итак, $\{R_0(\mathcal{G})\}=\{a_1a_2a_4a_3\}$.

Пример 2 показывает, что R_0-решение можно получить и тогда, когда неприменимо правило простого большинства. Действительно, из группового профиля $\mathcal{G}$:

$$a_1a_2a_4a_3$$

$$a_3a_1a_2a_4$$

$$a_2a_4a_3a_1$$

по правилу простого большинства получаем:

$$a_1\succ a_2,\ a_2\succ a_4,\ a_4\succ a_3,\ a_3\succ a_1.$$

Последние отношения не позволяют получить гупповое решение или выбрать недоминируемую альтернативу.

Приведем одну интерпретацию R_0-решений $\{R_0(\mathcal{G})\}$. Если в R_p $a_i\succ a_j$, а в $R_s a_i\prec a_j$, то такое несовпадение назовем инверсией R_s относительно R_p, $(R_s,\ R_p\in\mathcal{R}_0)$. Общее число инверсий в R_s относительно R_p (оно то же самое и для R_p относительно R_s) обозначим через I_p^s. Как легко видеть

$$\max_{R_s\in R_0} I(R_s,\ R_p)=\max_{R_s\in R_0} I_p^s=\frac{m(m-1)}{2}=I.$$

Поскольку $t_j^i = t_i^j$ и

$$t^s(R_p) = t_p^s = \sum_{i,j=1}^{m} t_j^{is}(R_p),$$

то

$$I^s(R_p) = I - \frac{1}{2}\, t_p^s.$$

Отсюда следует для $R_0 \in \{R_0(\mathcal{G})\}$

$$\frac{1}{2} \max_{R \in R_0} \sum_{s=1}^{n} t^s(R) = \frac{1}{2}\, T(R_0,\ \mathcal{G}) = \sum_{s=1}^{n} \left(I - I^s(R_0)\right), \tag{2}$$

или

$$\min_{R \in R_0} \sum_{s=1}^{n} I^s(R) = \sum_{s=1}^{n} I^s(R_0). \tag{A}$$

Равенство (А) показывает, что решение $R_0 \in \{R_0(\mathcal{G})\}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$ можно найти минимизируя сумму инверсной по индивидуальным профилям предпочтения.

Пусть $m=3$ и $R \in \mathcal{G} \subset \mathcal{R}_1$. Предположим, что $R \in \mathcal{G}$ индуцирует множество полезностей $u(a_i) = u_i$, $i=1,\ 2,\ 3$, так, что $u_i > u_k$ тогда и только тогда, когда $a_i \succ a_k$. Если ограничиться, как в [4], числами из симплекса $u_1 + u_2 + u_3 = 1$, $u_1,\ u_2,\ u_3 \geqslant 0$, то эти соотношения показаны на рис. 1.

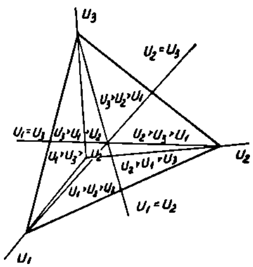

Рис. 1

Треугольники на симплексе с написанными соотношениями между числами соответствуют профилям предпочтения на рис. 2.

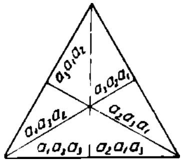

Рис. 2

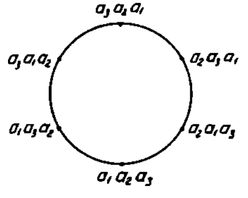

Рис. 3

Можно представить, что профили предпочтения лежат на окружности и расстояния между ними измеряются длиной дуги (рис. 3). Как легко проверить, длина дуги (меньшей) между R_t и R_s прямо пропорциональна числу инверсий R_t относительно R_s. Как показывает равенство (А), для того, чтобы найти $R_0 \in \{R_0, (\mathcal{G})\}$, достаточно найти такой R_0, чтобы суммарное расстояние от $R_s \in \mathcal{G}$ до R_0 было наименьшим.

Перейдем к определению группового решения $R \in \{R(\mathcal{G})\} \subset \mathcal{R}$, $\mathcal{G} = \{R_1, \ldots, R_n\} \subset \mathcal{R}$.

Будем называть последовательность альтернатив, написанных рядом в каком-то профиле предпочтения отрезком. Наименьший отрезок – единственная альтернатива, наибольший – весь профиль. Например, в $R = a_1a_2 \sim a_3$ имеется 6 отрезков: a_1, a_2, a_3, a_1a_2, $a_2 \sim a_3$, $a_1\ a_2 \sim a_3$.

Определение 2. Если $R_0 \in \{R_0(\mathcal{G})\}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$, содержит отрезок такой, что для любой перестановки альтернатив данного отрезка найдется $R_0' \in \{R_0(\mathcal{G})\}$, содержащий переставленные альтернативы в качестве отрезка, а другие альтернативы в R_0 и R_0' совпадают, то такие альтернативы назовем перестановочными.

Пусть имеются два отрезка, состоящие из одних и тех же альтернатив со строгим предпочтением между ними. Если $a_i \succ a_j$ в одном из них в том и только в том случае, когда $a_j \succ a_i$ в другом, и это выполняется для всех альтернатив отрезка, то такие отрезки называются противоположными. Например, $a_1a_3a_2$ и $a_2a_3a_1$.

Пусть $\mathcal{G} \subset \{R_1, \quad R_n) \subset \mathcal{R}$. Заменим каждый $R_s \in \mathcal{G}$ следующим образом:

а) если $R_s \in \mathcal{R}_0$, то $R_s \to R_s^1 R_s^2$ и $R_s = R_s' = R_s^2$,

б) если $R_s \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_0$, то отрезки эквивалентных альтернатив заменяем парами противоположных отрезков, например:

$$R_s = a_1a_2 \sim a_3 \to R_3^1 = a_1a_2a_3, \qquad R_s^2 = a_1a_3a_2,$$

$$R_s = a_3 \sim a_1 \sim a_2 \to R_s^1 = a_3a_2a_1, \qquad R_1^s = a_1a_2a_3.$$

Таким образом групповой профиль $\mathcal{G} = \{R_1, \quad R_n\} \subset \mathcal{R}$ переходит в $\mathcal{G}^2 = \{R_1^1, R_1^2, \ldots, R_n^1, R_n^2\} \subset \mathcal{R}_0$.

Очевидно следующее утверждение: $\{R_0, (\mathcal{G})\} = \{R_0(\mathcal{G}^2)\}$, когда $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$.

Определение 3. R-решением или групповым решением называется $R \in \in \{R(\mathcal{G})\}$, где $\{R(\mathcal{G})\}$ получается из $\{R_0(\mathcal{G}^2)\}$ следующим образом:

а) если в $R_0 \in \{R_0(\mathcal{G}^2)\}$ нет перестановочных альтернатив, то $R_0 \in \{R(\mathcal{G})\}$;

б) если в $R_0 \in \{R_0(\mathcal{G}^2)\}$ содержится отрезок перестановочных альтернатив, то $R_0 \notin \{R_0(\mathcal{G}^2)\}$, но R', получаемый из $\mathcal{R}_0$ заменой всех отрезков перестановочных альтернатив на эквивалентные, принадлежит $\{R(\mathcal{G})\}$. Если отрезок пере становочных альтернатив состоит не менее чем из трех альтернатив, то в таком отрезке существует больше одного отрезка перестановочных альтернатив. Мы заменяем наибольшие отрезки.

Из определения следует, что, если $\{R_0(\mathcal{G})\}$ пересечение с $\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_0$ всегда пусто, то пересечение $\{R(\mathcal{G})\}$ с $\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_0$ не обязательно пусто.

Иллюстрируем определение решения $\{R(\mathcal{G})\}$ несколькими примерами.

Пример 3.

$$\mathcal{G}: \begin{array}{l} R_1 = a_1a_2 \sim a_3, \\ R_2 = a_3a_1a_2. \end{array}$$

Переводим $\mathcal{G}$ в $\mathcal{G}^2 \subset \mathcal{R}_0$.

$$\mathcal{G}^2: \begin{array}{l} R_1^1 = a_1a_2a_3, \\ R_1^2 = a_1a_3a_2, \\ R_2^1 = a_3a_1a_2, \\ R_2^2 = a_3a_1a_2. \end{array}$$

Получаем:

$$\{R_0(\mathcal{G}^2)\} = \{a_1a_3a_2,\ a_3a_1a_2\}.$$

Перестановочные альтернативы здесь a_1 и a_3. По определению 3

$$\{R(\mathcal{G})\} = \{a_1 \sim a_3a_2\}.$$

Пример 4.

Пусть $\{R_0(\mathcal{G}^2)\} = \{a_1a_2a_3,\ a_3a_2a_1,\ a_1a_3a_2\}$.

По определению 3 имеем

$$\{(R(\mathcal{G})\} = \{a_1 \sim a_2a_3,\ a_3a_2 \sim a_1,\ a_1a_2 \sim a_3,\ a_3 \sim a_2a_1\}.$$

Обобщим $t_j^{is}(R_p)$ (1) на случай, когда R_s и $R_p \in \mathcal{R}$

$$k_i^{js}(R_p) = \begin{cases} t_i^{js}(R_p), \text{ если в } R_s \text{ и } R_p \text{ знаки строгого предпочтения}, \\ \frac{1}{2}, \text{ если в } R_s \text{ или в } R_p a_i \sim a_j. \end{cases} \quad (3)$$

Обозначим:

$$\{\bar{R}(\mathcal{G})\} = \left\{R' : \max_{R \in R} \sum_{s=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} k_i^{js}(R, \mathcal{G}) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} k_i^{js}(R', \mathcal{G})\right\}. \quad (4)$$

Лемма 1. $\{\bar{R}(\mathcal{G})\} = \{\bar{R}(\mathcal{G}^2)\}$ и $\{R(\mathcal{G})\} = \{R(\mathcal{G}^2)\}$.

Доказательство. Как и раньше, только T заменив на K, обозначим

$$K(R, \mathcal{G}) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} k_i^{js}(R, \mathcal{G}).$$

Пусть $\max_{R \in R} K(R, \mathcal{G}) = K(R^*, \mathcal{G})$, т. е. как следует из (4), $R^* \in \{R(\mathcal{G})\}$. Из определения чисел $k_i^{js}(R)$ следует, что $K(R^*, \mathcal{G}^2)$ может быть только целым числом и:

$$2K(R^*, \mathcal{G}) = K(R^*, \mathcal{G}^2).$$

Отсюда и (4) следует, что $\{\bar{R}(\mathcal{G})\} = \{\bar{R}(\mathcal{G}^2)\}$.

Второе утверждение следует из того, что $\{R_0(\mathcal{G})\} = \{R_0(\mathcal{G}^2)\}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$. Дальше нам удобно будет употреблять обозначение:

$$n_{ij}^s = t_j^{is}(\cdot\cdot\cdot \qquad \succ \qquad \cdot).$$

Таким образом, $\sum_{s=1}^{n} n_{ij}^s = n_{ij}$ обозначает число индивидов в профиле $\mathcal{G}_n$, для которых $a_i \succ a_j$.

Лемма 2. $\{\bar{R}(\mathcal{G})\} \cap \mathcal{R}_0 \neq \varnothing$.

Доказательство. В силу леммы 1 мы можем предположить, что $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$. Если $\{\bar{R}(\mathcal{G})\} \cap \{\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_0\} = \varnothing$, то доказывать нечего. Итак, пусть $R \in \{\bar{R}(\mathcal{G})\}$ и R имеет отрезок эквивалентности. Если отрезок состоит только из двух альтернатив $a_i \sim a_j$, то по (3) $k_j^i(R) = \frac{1}{2}n$, и тогда очевидно $n_{ij}(\mathcal{G}) = n_{ji}(\mathcal{G})$. Поэтому R_1, $R_2 \in \mathcal{R}_0$, полученные из R заменой $a_i \sim a_j$ на $a_i a_j$ и $a_j a_i$, также будут принадлежать $\{\bar{R}(\mathcal{G})\}$.

Допустим, что замена профиля R ($R \in \{\bar{R}(\mathcal{G})\}$) с эквивалентным отрезком на $R_p \in \mathcal{R}_0$ и $R_p \in \{\bar{R}(\mathcal{G})\}$ с перестановочными альтернативами вместо эквивалентных возможна, когда длина отрезка не превышает l. Докажем, что это верно и для $l+1$. Пусть

$$a_{i_1} \sim \qquad \sim a_{i_l} \sim a_{i_0}, \ \{i_1, \qquad i_l\} = L \subset M = \{1, \ \ldots, \ m\}.$$

По предположению индукции также:

$$n_{jk} = n_{kj}, \ j, \ k \in L.$$

Так как альтернативы связаны отношением эквивалентности, то порядок записи не имеет значения. Перепишем отрезок следущим образом:

$$a_1 \sim \qquad \sim a_t \sim a_{i_0} \sim a_{t+1} \sim \qquad \sim a_l,$$

и

$$\begin{gathered} n_{1i_0} \geqslant n_{i_0 1}, \ \ldots, \ n_{ti_0} \geqslant n_{i_0 t}, \\ n_{i_0 t+1} \geqslant n_{t+1 i_0}, \ \ldots, \ n_{i_0 l} \geqslant n_{l i_0}. \end{gathered} \tag{5}$$

Если в (5) хотя бы одно неравенство строгое, то, заменив отрезок эквивалентности $a_1 \sim \qquad \sim a_l \sim a_{i_0}$ отрезком

$$a_1 \sim \qquad \sim a_t \succ a_{i_0} \succ a_{t+1} \sim \qquad \sim a_l,$$

получим, что $K(R', \mathcal{G}) > K(R, \mathcal{G})$, где R' отличается от R только указанной заменой. Действительно:

$$K(R, \mathcal{G}) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{i, j \in M} k_j^{i_s}(R) = \sum_{i, j \in M} k_j^i(R) = \sum_{j \in M} k_j^{i_0} + \sum_{j \in M} k_{i_0}^j +$$

$$+ \sum_{i, j \in L} k_j^i + \sum_{\substack{i \in L \\ j \in M \setminus \{i_0\}}} k_j^i + \sum_{\substack{i \in M \setminus \{i_0\} \\ i \in L}} k_j^i + \sum_{i, j \in M \setminus \{i_0\}} k_j^i.$$

Как следует из (3) $k_i^j = k_j^i$, поэтому последнее выражение перепишем:

$$K(R, \mathcal{G}) = 2 \sum_{j \in M} k_j^{i_0}(R) + \sum_{i, j \in L} k_j^i + 2 \sum_{\substack{i \in L \\ j \in M \setminus \{i_0\}}} k_j^i + \sum_{i, j \in M \setminus \{i_0\}} k_j^i. \tag{6}$$

Аналогично для $K(R', \mathcal{G})$ имеем:

$$K(R', \mathcal{G}) = 2 \sum_{j \in M} k_j^{i_0}(R') + \sum_{i, j \in L} k_j^i + 2 \sum_{\substack{i \in L \\ j \in M \setminus \{i_0\}}} k_j^i + \sum_{i, j \in M \setminus \{i_0\}} k_j^i. \tag{7}$$

Поскольку $n_{ij} = n_{ji}$ для i, $j \in L$, то $k_j^i = \text{const}$ независимо от отношения порядка между a_i и a_j в R. Отношение порядка a_i и a_j, когда $i \in L$ и $j \in u \setminus \{i_0\}$ совпадает для R и R'. Поэтому, вычитая (6) из (7), получаем:

$$K(R', \mathcal{G})-K(R, \mathcal{G})=2\sum_{j\in M}\left(k_j^{i_0}(R')-k_j^{i_0}(R)\right)=$$

$$=2\sum_{j\in L}\left(k_j^{i_0}(R')-k_j^{i_0}(R)\right)+2\sum_{j\in M\setminus L}\left(k_j^{i_0}(R')-k_j^{i_0}(R)\right)=$$

$$=2\sum_{j\in L}\left(k_j^{i_0}(R')-k_j^{i_0}(R)\right).$$

По определению k_j^i имеем:

$$k_j^{i_0s}(R)=\frac{1}{2}, \qquad j\in L,$$

и

$$2\sum_{j\in L}k_j^{i_0}(R)=2\cdot\frac{l}{2}n=nl. \tag{8}$$

Кроме того,

$$2\sum_{j\in L}k_j^{i_0}(R')=2\left(\sum_{j=1}^{t}n_{ji_0}+\sum_{j=t+1}^{l}n_{i_0j}\right)=$$

$$=2\left(n_{1i_0}+\qquad+n_{ti_0}+n_{i_0t+1}+\qquad+n_{i_0l}\right). \tag{9}$$

Поскольку $n_{i_0j}+n_{ji_0}=n$ для $\mathcal{G}\subset\mathcal{R}_0$, то из (5) и (9)

$$2\sum_{j\in L}k_j^{i_0}(R')\geqslant nl.$$

Отсюда и из (8), ввиду того, что в (5) хотя бы одно неравенство строгое, следует

$$K(R', \mathcal{G})-K(R, \mathcal{G})=2\sum_{j\in L}k_j^{i_0}(R')-nl>0.$$

Поскольку $\max\limits_{R_p\in R}K(R_p, \mathcal{G})=K(R, \mathcal{G})$, последнее неравенство неверно. Следовательно, в (5) возможны только равенства. Итак, если в $R\in\{\bar{R}, (\mathcal{G})\}$ имеется отрезок эквивалентности, то в $\{\bar{R}(\mathcal{G})\}$ существуют профили, в которых вместо эквивалентных альтернатив будут перестановочные. Лемма доказана.

В лемме доказано и то, что если в $R\in\{\bar{R}(\mathcal{G})\}$ имеется отрезок эквивалентности, тогда для всех альтернатив этого отрезка $n_{ij}(\mathcal{G})=n_{ji}(\mathcal{G})$.

Теорема 1. $\{R_0(\mathcal{G})\}\cup\{R(\mathcal{G})\}\subset\{\bar{R}(\mathcal{G})\}$.

Доказательство. В силу леммы 1 предположим $\mathcal{G}\subset\mathcal{R}_0$. Из леммы 2 следует, что

$$K(R_0, \mathcal{G})=K(\bar{R}, \mathcal{G}),\ R_0\in\{R_0(\mathcal{G})\},\ \bar{R}\in\{\bar{R}(\mathcal{G})\}.$$

Отсюда сразу получаем:

$$\{R_0(\mathcal{G})\}=\{\bar{R}(\mathcal{G})\}\cap\mathcal{R}_0. \tag{10}$$

Пусть $\{R(\mathcal{G})\}\cap(\mathcal{R}\setminus\mathcal{R}_0)$ не пусто и $R\in\{R(\mathcal{G})\}\cap(\mathcal{R}\setminus\mathcal{R}_0)$. Тогда в R содержатся отрезки эквивалентных альтернатив. Допустим, что такой отрезок в R единственный. Отрезку эквивалентности L соответствуют перестановочные альтернативы из профилей, принадлежащих $\{R_0(\mathcal{G})\}$. Следовательно $n_{ij}=n_{ij}$

для i, $j \in L$. Отсюда, а также из определения k_j^i, $\max\limits_{R \in R} K(R, \mathcal{G}) = K(R' \mathcal{G})$ для всех $R' \in \{R(\mathcal{G})\}$, что и доказывает включение $\{\bar{R}(\mathcal{G})\} \subset \{\bar{R} - (\mathcal{G})\}$. Отсюда и из (10) следует утверждение теоремы, поскольку, если в R содержится несколько отрезков эквивалентных альтернатив, то доказательство то же за исключением того, что все отрезки эквивалентности заменяются перестановочными альтернативами.

Заметим, что обратное включение $\{R_0(\mathcal{G})\} \cup \{R(\mathcal{G})\} \supset \{\bar{R}(\mathcal{G})\}$ не всегда выполняется.

Пример 5. Пусть $\{R_0(\mathcal{G})\} = \{a_1a_2a_3a_4,\ a_4a_3a_2a_1\}$. Отсюда, по определению 3, заменяя все отрезки перестановочных альтернатив отрезками эквивалентных альтернатив, получаем:

$$\{R(\mathcal{G})\} = \{a_1 \sim a_2a_3 \sim a_4,\ a_4 \sim a_3a_2 \sim a_1,\ a_1a_2 \sim a_3a_4,\ a_4a_3 \sim a_2a_1\}.$$

Из определения 1 (т. е. определения $\{R_0(\mathcal{G})\}$) имеем $n_{12} = n_{21}$, $n_{34} = n_{43}$. Из определения $\{\bar{R}(\mathcal{G})\}$

$$a_1 \sim a_2a_3a_4,\ a_1a_2a_3 \sim a_4 \in \{\bar{R}(\mathcal{G})\}.$$

Некоторые свойства $\{R(\mathcal{G})\}$

В [1] приведены вероятности того, что $P(m, n)$ (m-альтернатив, n-индивидов) несуществования доминирующей альтернативы по правилу простого большинства, если в $\mathcal{G} = \{R_1, \ldots, R_n\} R_s \in \mathcal{G}$ выбраны из $\mathcal{R}$ наугад, т.е. с одинаковыми вероятностями. Вероятности $P(m, n)$ больше 0. Также и $\lim\limits_{n \to \infty} P(m, n) > 0$. В следующей теореме мы рассматриваем аналогичный вопрос для R-решения.

Георема 2. *Пусть $P(m, n)$ — вероятность того, что при m альтернативах и числе индивидов не больше n число решений $R \in \{R(\mathcal{G})\}$, где $\mathcal{G} = \{R_1, \ldots, R_t\}$, $1 \leqslant t \leqslant n$ и $R_s \in \mathcal{G}$, выбираются из $\mathcal{R}$ с одинаковыми вероятностями, не единственно. Тогда*:

$$\lim_{n \to \infty} P(m, n) = 0.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно доказать утверждение теоремы для $R \in \{\bar{R}(\mathcal{G})\}$. Пусть $P(m, n)'$ — вероятность того, что при числе индивидов, т.е. индивидуальных профилей в $\mathcal{G}$, не превосходящем n, число $R \in \{\bar{R}(\mathcal{G})\}$ не единственно. Пусть число различных индивидуальных профилей из $\mathcal{R}$ равно q. Обозначим эти профили через R_t, $t = 1, \ldots, q$. Поскольку m конечное, то q тоже конечное. Обозначим:

$$k_s^t = \sum_{i, j=1}^{m} k_j^i(R_s, R_t).$$

Из (4) следует, что $R_p \in \{\bar{R}(\mathcal{G})\}$ тогда и только тогда, когда:

$$\max_{R_t \in R} \sum_{R_s \in G} \sum_{i, j=1}^{m} k_j^i(R_s, R_t, \mathcal{G}) = \max_{t \in (1, \ldots, q)} \sum_{R_s \in G} k_s^t = \sum_{R_s \in G} k_s^p, \tag{11}$$

где число индивидуальных профилей в $\mathcal{G} \leqslant n$.

Обозначим через x_s, $s=1, \ldots, q$, число индивидов, профиль предпочтения которых в $\mathcal{G}$ есть R_s. Тогда из (11) получаем, что $R_p \in \{\bar{R}(\mathcal{G})\}$ тогда и только тогда, когда:

$$\max_{t \in \{1, \ldots, q\}} \sum_{R_s \in G} k_s^t = \sum_{s=1}^{q} x_s k_s^p, \tag{12}$$

где

$$\sum_{s=1}^{q} x_s \leqslant n, \qquad x_s \geqslant 0, \qquad x_s - \text{целые числа.} \tag{13}$$

Из равенства (12) следует, что достаточным условием единственности $R \in \{\bar{R}(\mathcal{G})\}$ является:

$$\sum_{s=1}^{q} x_s k_s^{p_1} \neq \sum_{s=1}^{q} x_s k_s^{p_2}, \tag{14}$$

для всех $p_1, p_2\} \{1, \ldots, q\}$ и $p_1 \neq p_2$.

Так как векторы $x=(x_1, \ldots, x_q)$, удовлетворяющие ограничениям (13), выбираются с одинаковыми вероятностями, то вероятность существования таких $p_1 \neq p_2$, чтобы в (14) было равенство, не превышает следующей величины:

$$P^*(m, n) = \frac{C_q^2 n^{q-1}}{\left[\frac{n}{q}\right]^q},$$

где

C_q^2 — число сочетаний по 2 из $\{1, \ldots, q\}$,

$\left[\frac{n}{q}\right]$ — целая часть числа $\frac{n}{q}$.

Действительно, если выполняется равенство в (14), то целочисленные точки $x=(x_1, \ldots, x_q)$, удовлетворяющие этому равенству, лежат на $(q-1)$-мерной гиперплоскости q-мерного евклидова пространства. Число их на каждой такой гиперплоскости ввиду ограничений (13) не больше, чем n^{q-1}. Число таких гиперплоскостей не превышает числа сочетаний по 2 из $\{1, \ldots, q\}$. Число целочисленных точек $x=(x_1, \ldots, x_q)$, удовлетворяющих ограничения (13), не меньше, чем $\left[\frac{n}{q}\right]^q$ Отсюда следует, что:

$$P(m, n) \leqslant P^*(m, n) = \frac{C_q^2 n^{q-1}}{\left[\frac{n}{q}\right]^q}$$

Пусть $n=kq+d$, где d — целое и $0 \leqslant d \leqslant q$. Тогда для любого $0 \leqslant d \leqslant q$

$$P^*(m, n) = \frac{C_q^2 (kq+d)^{q-1}}{\left[\frac{kq+d}{q}\right]^q} \leqslant \frac{q^{q-1} C_q^2 (k+1)^{q-1}}{k^q}$$

Поскольку

$$\lim_{k \to \infty} \frac{q^{q-1} C_q^2 (k+1)^{q-1}}{k^q} = 0,$$

то и

$$\lim_{n \to \infty} P^*(m, n) = 0.$$

Отсюда получаем доказываемое:

$$\lim_{n \to \infty} P(m, n) = 0.$$

Пусть $V(m, n)=1-P(m, n)$. Из леммы 2 и только что доказанной теоремы получаем, что вероятность $V(m, n)$ существования единственного решения $R\in\mathscr{R}_0$, если $R_s\in\mathscr{G}$ равновероятны, стремится к 1, когда $n\to\infty$.

Теорема 3. *Если существует групповое решение R_M по правилу простого большинства, то $\{\mathscr{R}(\mathscr{G})\}=R_M$. Если существует недоминируемая альтернатива a_i по правилу простого большинства, то во всех*

$$R\in\{R(\mathscr{G})\}\ a_1\succsim a_j,\ j=1, \ldots, m.$$

Доказательство. Пусть групповое решение по правилу простого большинства R_M существует. Пусть для определенности

$$a_1\succsim a_2\succsim \qquad \succsim a_m.$$

Пусть существует решение $R\in\{R(\mathscr{G})\}$ и

$$R=a_{i_1}\succsim a_{i_2}\succsim \qquad \succsim a_{i_{k-1}}\succsim a_{i_k}\succsim \qquad \succsim a_{i_m},\ a_{i_k}=a_1.$$

Как следует из определения R_M,

$$n_{12}\geqslant n_{21}, \ldots, n_{1m}\geqslant n_{m1},$$

причем строгому предпочтению $a_1\succ a_i$ соответствует строгое неравенство $n_{1i}>n_{i1}$. Среди альтернатив $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k-1}}$ нет таких, чтобы $n_{i_j i_k}>n_{i_k i_j}=1$, $k-1$, что следует из определения R_M. Отсюда, поскольку $R\in\{\mathscr{R}(\mathscr{G})\}$, следует $n_{i_j i_k}=n_{i_k i_j}$, $j=1, \ldots, k-1$.

Итак, $R'=a_1\succsim a_{i_1}\succsim\ldots\succsim a_{i_{k-1}}\succsim a_{i_{k+1}}\succsim\ldots\succsim a_{i_m}\in\{R(\mathscr{G})\}$.

Покажем, что, если a_1 содержится в отрезке эквивалентности профиля R_M, и длина отрезка l, $1\leqslant l\leqslant m$, то

$$k\leqslant l \text{ и } \{a_1, \cdots, a_l\}\supset\{a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}\}. \qquad (15)$$

Допустим, что $k>l$ или неверно включение в (15). В обоих случаях среди альтернатив $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ найдется a_{k_0} такое, что $n_{k_0 i_k}<n_{i_k k_0}$, поскольку имеем $a_1\succ a_{k_0}$. Но это противоречит тому, что $R\in\{R(\mathscr{G})\}$, поскольку, перемещая $a_1=a_{i_k}$ влево от a_{k_0}, мы увеличиваем $K(R, \mathscr{G})$, что невозможно. Из (15) следует, что a_1 можно передвигать в R_M вправо только в отрезке эквивалентности R_M, содержащем a_1. Применив рассуждение ко всем остальным альтернативам $a_2, \ldots, a_m$, мы приходим к выводу, что $R\in\{R(\mathscr{G})\}$ может отличаться от R_M только порядком записи альтернатив в отрезках эквивалентности профиля R_M. Это и доказывает теорему, так как вторая часть получается применением рассуждения к отрезку эквивалентности R_M, содержащем a_1.

Теорема 3 и пример 2 показывают, что предлагаемое правило является обобщением правила простого большинства как при нахождении группового решения, так и при выборе недоминируемой альтернативы. Кроме того, очевидно:

Следствие. *Для того, чтобы существовало групповое решение по правилу простого большинства, необходимо, чтобы в $\{R(\mathscr{G})\}$ содержался единственный элемент.*

Переходим к вопросу о том, удовлетворяет ли $R\in\{R(\mathscr{G})\}$ требованию положительной реакции, которое применительно к $\{R(\mathscr{G})\}$. Сформулируем это следующим образом.

Пусть $R \in \{R(\mathcal{G})\}$. Тогда, если в каком-то $R_s \in \mathcal{G}\, a_k \succsim a_i$ меняется на $a_i \succsim a_k$, то существует решение $R' \in \{R(\mathcal{G}')\}$, где $\mathcal{G}'$ отличается от $\mathcal{G}$ только перестановкой a_k и a_i в R_s, такое, что $a_i \succ a_j$, если в R было $a_i \succ a_j$, или $a_i \succ a_j$, если в R было $a_i \sim a_j$.

В общем случае не удалось выяснить удовлетворяется ли это для $R \in \{R(\mathcal{G})\}$.

Для удобства записи изменим обозначения альтернатив $\{a_1, \ldots, a_m\}$ на $\{1, \ldots, m\}$. В силу того, что $\{R(\mathcal{G})\} = \{R(\mathcal{G}^2)\}$, если не оговорено противное, будем считать $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$.

Пусть имеем, что $R = 1\,2\,\ldots\,m$. Тогда

$$K(R,\ \mathcal{G}) = \sum_{R_s \in G}\ \sum_{i,\,j-1}^{m} k_j^i(R_s,\ R,\ \mathcal{G}),$$

а по определению n_{ij}

$$K(R,\ \mathcal{G}) = 2 \sum_{\substack{i=1\\ 1<j}}^{m} n_{ij}.$$

Обозначим

$$N(R,\ \mathcal{G}) = \frac{K(R,\ \mathcal{G})}{2} \tag{16}$$

и докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Если $R_0 \in \{R_0(\mathcal{G})\}$ и $R_0' \in \{R_0(\mathcal{G}')\}$, где $\mathcal{G}$ отличается от $\mathcal{G}'$ только тем, что некоторый индивидуальный профиль $R_s = \ldots ki \qquad \in \mathcal{G}$ изменяется на $R_s' = \qquad ik \qquad$ отличающийся только перестановкой i и k, то*

$$N(R_0, \mathcal{G}) - N(R_0', \mathcal{G}') = \pm 1 \ \text{ или } \ 0.$$

Доказательство. То, что разность принимает целочисленные значения, сразу следует из (3), (16) и $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$. Если, например,

$$N(R_0, \mathcal{G}) - N(R_0', \mathcal{G}') \geqslant 2,$$

то, поскольку

$$N(R_0, \mathcal{G}) = N(R_0, \mathcal{G}') \pm 1,$$

получаем:

$$N(R_0, \mathcal{G}') \geqslant N(R_0', \mathcal{G}') + 1.$$

Полученное неравенство невозможно, так как $R_0' \in \{R_0(\mathcal{G}')\}$. Лемма доказана.

Везде дальше мы будем обозначать, если не оговорено противное, через $\mathcal{G}' \subset \mathcal{R}_0$, групповой профиль, отличающийся от $\mathcal{G} = \{R_1, \ldots, R_s, \qquad R_n\}$ только тем, что в $R_s = \ldots ki \qquad i$ и k поменены местами, а остальные альтернативы совпадают.

Лемма 4. *Если $R_0 \in \{R_0(\mathcal{G})\}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$ и $R_0 = \ldots ik \ldots$, то, изменив $R_s = \ldots ki \qquad$ на $R_s' = \ldots ik \qquad$ получим, что $R_0 \in \{R_0(\mathcal{G}')\}$ и $N(R_0, \mathcal{G}) = N(R_0, \mathcal{G}) + 1$.*

Доказательство. Из $n^s_{ik}=n_{ik}(R_s)=0$ и $n_{ik}(R'_s)=1$ следует

$$N(R_0, \mathcal{G}')=N(R_0, \mathcal{G}')+1.$$

Отсюда и из леммы 3 получаем, что $R_0\in\{R_0(\mathcal{G}')\}$.

Лемма 5. *Пусть для всех $R_0\in\{R_0(\mathcal{G})\}$ имеет место $i\succ j$. Тогда если существует R'_0 $j\succ i$ и $R'_0\in\{R_0(\mathcal{G}')\}$, то:*

1) *все $R_0\in\{R_0(\mathcal{G})\}$ имеют вид*

$$R_0= \quad k \quad i\dots j$$

2) *все $R'_0\in\{R_0(\mathcal{G}')\}$, в которых $j\succ i$, имеют вид*

$$R'_0=\dots j \qquad k$$

Доказательство. Допустим, что существует такой $R_0\in\{R_0(\mathcal{G})\}$, в R_0 $i\succ k$. В таком случае из леммы 4 получаем $R_0\in\{R_0(\mathcal{G}')\}$ и:

$$N(R_0, \mathcal{G}')=N(R_0, \mathcal{G})+1.$$

Отсюда

$$N(R_0, \mathcal{G})=N(R'_0, \mathcal{G}')-1 \tag{17}$$

для всех $R'_0\in\{R_0(\mathcal{G}')\}$ и $R_0\in\{R_0(\mathcal{G})\}$.

По условию леммы существует $R'_0\in\{R_0(G')\}$, что в R'_0 $j\succ i$. Но тогда из (17), в силу того, что $N(R'_0, \mathcal{G})\geqslant N(R'_0, \mathcal{G}')-1$, получаем $R'_0\in\{R_0(\mathcal{G})\}$. Поскольку $R'_0=\dots j$ то это невозможно. Следовательно, все $R_0\in\{R_0(\mathcal{G})\}$ имеют вид:

$$R_0=\dots k \quad i\dots j$$

Пусть какое-то $R'_0\in\{R_0(\mathcal{G}')\}$ имеет вид:

$$R'_0=\dots j \quad k \qquad \text{или} \dots k\dots j$$

Изменяя $R'_s=\dots ik$ на $R_s= \quad ki\dots$, получаем

$$N(R'_0, \mathcal{G})=N(R'_0, \mathcal{G}')+1.$$

Отсюда, по лемме 3 следует, что $R'_0\in\{R'_0(\mathcal{G})\}$, что невозможно. Следовательно, если в $R'_0 j\succ i$ и $R'_0\in\{R_0(\mathcal{G}')\}$, то

$$R'_0=\dots j \quad i\dots k$$

Аналогично доказывается и следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть для всех $R_0\in\{R_0(\mathcal{G})$ имеет место $j\succ i$. Тогда, если существует $R'_0\in\{R_0(\mathcal{G}')\}$, что в нем $i\succ j$, где $\mathcal{G}'=\{R_1, \dots, R'_s, \dots, R_n\}$ и $R'_s=\dots, ki\dots$, а $R_s= \quad ik$ (остальные альтернативы совпадают), то:*

1) *все $R_0\in\{R_0(\mathcal{G})\}$ имеют вид*

$$R_0=\dots j\dots i\dots k$$

2) *все $R'_0\in\{R_0(\mathcal{G}')\}$, в которых $i\succ j$, имеют вид*

$$R'_0=\dots k\dots i\dots j$$

Теорема 4. *Пусть $m=3$ или 4. Если существует $R\in\{R(\mathcal{G})\}$, $\mathcal{G}\subset\mathcal{R}$, такое, что в нем $i\succ j$, то существует такой $R'\in R(\mathcal{G}')\}$, где $\mathcal{G}'$ получается заменой $R_s= \quad k\succ i$ на $R'_s= \quad i\succ k\dots$, что и в R' $i\succ j$.*

Доказательство. Докажем сначала теорему для случая $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$. Заметим, что если существует $R \in \{R(\mathcal{G})\}$, такой что $i \succ j$, то существует $R_0 \in \in \{R_0(\mathcal{G})\}$, что $i \succ j$. Допустим, что $\mathcal{G}$ меняется на $\mathcal{G}'$ и не существует $R \in \{R(\mathcal{G}')\}$, чтобы $i \succ j$. Отсюда следует, что для всех $R'_0 \in \{R_0(\mathcal{G}')\}$ имеем $j \succ i$. С точностью до обозначений $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}'$ выполнены условия леммы 6. Если заменить все индивидуальные профили в $\mathcal{G}$ противоположными и обозначить $\mathcal{G}$ через $\mathcal{G}'$, а $\mathcal{G}'$ через $\mathcal{G}$, то для того, чтобы получить противоречие нам надо показать в силу леммы 5, что из существования решения $R'_0 = \ldots j \ldots i \ldots k \quad \in \{R_0(\mathcal{G}')\}$ и решения $R_0 = \ldots k \ldots i \ldots j \quad \in \{R_0(\mathcal{G})\}$, не обязательно следует, что для всех $R_0 \in \{R_0(\mathcal{G})\}$ порядок отношения между i, j, k будет $k \succ i \succ j$.

Пусть $m=3$ и $R_0 = kij \in \{R_0(\mathcal{G})\}$. Если существует $R'_0 \in \{R_0(\mathcal{G}')\}$ и $j \succ i$, то $R'_0 = jik$. Но поскольку $R_0 \in \{R_0(\mathcal{G})\}$ и $R'_0 \in \{R_0(\mathcal{G}')\}$, то

$$n_{ij}(\mathcal{G}) = n_{ji}(\mathcal{G}) = n_{ji}(\mathcal{G}').$$

Отсюда:

$$k_{ji} \in \{R_0(\mathcal{G})\},$$

что противоречит тому, что для всех $R_0 \in \{R_0(\mathcal{G})\}$ $i \succ j$.

Пусть $m=4$. Четвертую альтернативу обозначим через l.

Поскольку мы допустили, что для всех $R_0 \in \{R_0(\mathcal{G})\}$ в R_0 $i \succ j$ и существует $R'_0 \in \{R_0(\mathcal{G}')\}$, что $j \succ i$, то в силу леммы 5 надо рассмотреть 4 случая:

1) $R_0 = kijl$,

2) $R_0 = kilj$,

3) $R_0 = klij$,

4) $R_0 = lkij$.

Для каждого из четырех R_0 возможно, что существуют $R'_0 \in \{R_0(\mathcal{G}')\}$, которые в силу леммы 5 могут быть такими:

а) $R'_0 = jikl$,

б) $R'_0 = jilk$,

в) $R'_0 = jlik$,

г) $R'_0 = ljik$.

1) $R_0 = kijl$.

Поскольку не существует $R_0 \in \{R_0(\mathcal{G})\}$, чтобы в R_0 $j \succ i$, то имеем:

$$n_{ij}(\mathcal{G}') = n_{ij}(\mathcal{G}) > n_{ji}(\mathcal{G}) = n_{ji}(\mathcal{G}'). \tag{18}$$

Отсюда следует, что если R'_0 имеет вид а) $jikl$, б) $jilk$, г) $ljik$, то $R'_0 \notin \{R_0(\mathcal{G}')\}$. Если в) $R'_0 = jlik \in \{R_0(\mathcal{G}')\}$, то, ввиду $kijl \in \{R_0(G)\}$, имеем

$$N(jli, \mathcal{G}') = N(ijl, \mathcal{G}) = N(jli, \mathcal{G}), \tag{19}$$

где, по определению $N(R, \mathcal{G})$:

$$N(jli) = n_{jl} + n_{ji} + n_{li},$$

$$N(ijl) = n_{ij} + n_{il} + n_{jl}.$$

Поскольку только для альтернатив i и k $n_{ik}(\mathcal{G}) \neq n_{ik}(\mathcal{G}')$, то (19) действительно верно. Ввиду (19), получаем, что $kjli \in \{R_0(\mathcal{G})\}$.

2) $R_0 = kilj$.

Аналогично, как и в случае 1) $R_0 = kijl$ и в) $R'_0 = jlik$, проверяется, что если R'_0 имеет вид б) $jilk$, в) $jlik$, г) $ljik$, то существует $R_0 \in \{R'_0(\mathcal{G})\}$ и в R_0 $j \succ i$.

Пусть а) $R'_0 = jikl \in \{R_0(\mathcal{G}')\}$. Имеем

$$n_{ji} + n_{jk} + n_{jl} \geqslant n_{ij} + n_{kj} + n_{lj}. \tag{20}$$

Отсюда следует, что $jkil \in \{R_0(\mathcal{G})\}$, поскольку $kilj \in \{R(\mathcal{G})\}$.

3) $R_0 = klij$.

Ввиду (18) следует, что если R'_0 имеет вид а) $jikl$, б) $jilk$, г) $ljik$, то $R'_0 \notin \{R_0(\mathcal{G}')\}$.

Пусть в) $R'_0 = jlik$. Ввиду $N(lij) = N(jli)$ и $klij \in \{R_0(\mathcal{G})\}$ имеем, что $kjli \in \{R_0(\mathcal{G})\}$.

4) $R_0 = lkij$.

Возможно только в) $R'_0 = jlik$. Ввиду (20) и $lkij \in \{R_0(\mathcal{G})\}$ имеем $jlki \in \{R_0(\mathcal{G})\}$.

Теорема для $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$ доказана. Поскольку для $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}$ $\{R(\mathcal{G})\}$ получается из $\{R_0(\mathcal{G}^2)\}$ и $\mathcal{G}^2 \subset \mathcal{R}_0$, то теорема доказана полностью.

Как следствие теоремы 4 получается.

Теорема 5. *Пусть $m=3$ или 4. Если для всех $R \in \{R(\mathcal{G})\}$ в R $i \succ j$, то и для всех $R' \in \{R(\mathcal{G}')\}$ в $R' i \succ j$.*

Доказательство. Если бы существовал $R' \in \{R(\mathcal{G}')\}$ и в $R' j \succ i$, то существовал бы и $R'_0 \in \{R_0(\mathcal{G}')\}$, что в R'_0 $j \succ i$. В таком случае из теоремы 4 следовало бы существование $R_0 \in \{R_0(\mathcal{G})\}$ такого, что в $R_0 j \succ i$, что невозможно.

Из теорем 5 и 6 получаем.

Следствие. *Если $m=3$ или 4 и сущесвует $R \in \{R(\mathcal{G})\}$, что $i \underset{\sim}{\succ} j$, то, заменяя порядок отношения i „$\underset{\sim}{\prec}$“ с другими альтернативами на „$\underset{\sim}{\succ}$“ (т. е. $i \underset{\sim}{\prec} k$ на $i \underset{\sim}{\succ} k$), а порядок остальных оставляя без изменений, получаем $\mathcal{G}^*$, для которого существует $R \in \{R(\mathcal{G}^*)\}$, что в R $i \underset{\sim}{\succ} j$. Если для всех $R \in \{R(\mathcal{G})\}$ $i \succ j$, то и для всех $R \in \{R(\mathcal{G}^*)\}$ $i \succ j$.*

Пусть $\{1, \quad n\} = N$. Обозначим через $i \underset{\sim}{\succ} j$ тот факт, что в R_s $i \underset{\sim}{\succ} j$, и существует s_0 такой, что в R_{s_0} $i \succ j$. Аналогично $i \underset{N}{\sim} j$ означает, что R_s $i \sim j$ для всех $s \in N$.

Теорема 6. *Оптимальность по Парето. Если $i \underset{\underset{N}{\sim}}{\succ} j$, тогда в R также $i \succ j$ для любого $R \in \{R(\mathcal{G})\}$. Если $i \underset{N}{\sim} j$, то существует $R \in \{R(\mathcal{G})\}$, что в R $i \sim j$.*

Доказательство. Для доказательства того, что не существует $R \in \{R(\mathcal{G})\}$ такого, что $i \underset{\sim}{\prec} j$, когда $i \underset{\underset{N}{\sim}}{\succ} j$, достаточно показать, что $i \succ j$ для всех $R_0 \in \{R_0(\mathcal{G}^2)\}$.

Пусть

$$R_0 = 1 \quad j \quad l \quad m.$$

Отсюда и из (16) имеем:

$$\frac{1}{2} K(R_0, \mathcal{G}^2) = \quad + (n_{1j} + \quad + n_{jl} + \quad + n_{ji} + \quad + n_{jm}) +$$
$$+ (n_{1i} + \quad + n_{ji} + \quad + n_{li} + \quad + n_{im}) + \tag{21}$$

Положим, что сумма в первых скобках не меньше чем во вторых. Поскольку $i \underset{N}{\succ} j$, то мы не уменьшим сумму (21), если в первых скобках вместо j везде, кроме n_{ji}, подставим i. Отсюда следует, что для $R_0' = 1 \quad ji \quad l$

$$K(R_0', \mathcal{G}^2) \geqslant K(R_0, \mathcal{G}^2). \tag{22}$$

Из $i \underset{N}{\succ} j$ следует $n_{ij} > n_{ji}$ и из (22) для

$$R_0'' = 1 \quad ij \quad l$$

получаем:

$$K(R_0'', \mathcal{G}^2) > K(R_0', \mathcal{G}^2) \geqslant K(R_0, \mathcal{G}^2). \tag{23}$$

Поскольку $K(R_0, \mathcal{G}^2) = \max\limits_{R \in R_0} K(R, \mathcal{G}_2)$, то ввиду (23), R_0 с $j \succ i$ не является решением.

Если $i \underset{N}{\sim} j$, то $n_{ij}(\mathcal{G}^2) = n_{ji}(\mathcal{G}^2)$ и, следовательно,

$$K(R_0'', \mathcal{G}^2) = K(R_0', \mathcal{G}^2) \geqslant K(R_0, \mathcal{G}^2). \tag{23a}$$

Из равенства $K(R_0'', \mathcal{G}^2) = K(R_0', \mathcal{G}^2)$ получаем, что R_0' и $R_0'' \in \{R_0(\mathcal{G}^2)\}$. Отсюда следует существование $R \in \{R(\mathcal{G})\}$, что в $R\, i \sim j$. Теорема доказана. Заметим следующее.

Поскольку из (23a) не следует, что $K(R_0', \mathcal{G}^2) > K(R_0, \mathcal{G}^2)$, то ввиду $i \underset{N}{\sim} j$, если

$$R_0 = 1 \quad j \quad l \qquad m \in \{R_0(\mathcal{G})\},$$

то и $\bar{R}_0$, полученный перестановкой i и j,

$$R_0 = 1 \qquad l \quad j \quad m \in \{R_0(\mathcal{G}^2)\}.$$

Так как может случиться, что альтернативы, принадлежащие отрезку $j \quad l \ldots$

i, не перестановочные, то утверждение теоремы в случае $i \underset{N}{\sim} j$ усилить в том смысле, что для всех $R \in \{R(\mathcal{G})\}$ в $R\, i \sim j$, нельзя. Могут существовать R и $\bar{R} \in \{R(\mathcal{G})\}$ такие, что в $R\, j \succ i$, а в $\bar{R} i \succ j$.

Отметим еще следующее свойство.

Теорема 7. *Пусть $R_s \in \mathcal{R}^2$, $s \in N$. Присоединение новой альтернативы k не может изменить группового порядка старых альтернатив $i \succ j$ тогда и только тогда, когда $n_{ij} > \frac{2}{3} n$.*

Доказательство. Достаточность. Нам надо показать, что не существует $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{R}^3$ такого, что для некоторого $R \in \{R(\mathcal{G}_n)\}$ имело бы место $j \succ i$, когда $n_{ij}(\mathcal{G}_n) > \frac{2}{3} n$.

Пусть такое решение, что в нем $j \succ i$, существует. Тогда $jki \in \{R_0(\mathcal{G}_n)\}$ и $kji, jik \notin \{R_0(\mathcal{G}_n)\}$, поскольку $n_{ij} > n_{ji}$ и, следовательно, $N(kij, \mathcal{G}_n)$ и $N(ijk, \mathcal{G}_n)$ соответственно больше $N(kji, \mathcal{G}_n)$ и $N(ijk, \mathcal{G}_n)$. Обозначим через $\mathcal{G}_n^*$ такой групповой профиль, что:

$$N(jki, \mathcal{G}_n^*) = \max_{G_n \subset R_0^3} N(jki, \mathcal{G}_n), \tag{24}$$

где $\mathcal{G}_n = \{R_1, \quad R_n\}$.

Из (2) и (16) следует

$$\max_{R\in R_0} N(R,\ \mathcal{G})=\max_{R\in R_0}\sum_{R\in G_n}\Big(I-I^s(R)\Big),\ \mathcal{G}_n\subset\mathcal{R}_0^3. \tag{25}$$

Имеем, если $jki\in\{R_0(\mathcal{G}_n)\}$:

$$\min_{R\in R_0}\sum_{R_s\in G_n} I^s(R)=\sum_{R_s\in G_n} I^s(jki).$$

Отсюда, ввиду (24) и (25), легко проверить, что $\mathcal{G}^*$ имеет следующий вид:

а) если в $R_s\in\mathcal{G}_n^* j\succ i$, то $R_s=jki$,

б) если в $R_s\in\mathcal{G}_n^*\ i\succ j$, то $R_s=kij$ или ijk.

Действительно, если в $R_s j\succ i$, то:

$$I(R_s,\ jki)=0,\ \text{когда}\ \ R_s=jki. \tag{26}$$

Если в $R_s i\succ j$, то

$$I(ijk,\ jki)=I(kij,\ jki)=2<I(ikj,\ jki)=3. \tag{27}$$

Из (25), (26) и (27), ввиду того, что $I=3$,

$$N(jki,\ \mathcal{G}_n^*)=n_{ij}+3n_{ji}=3n_{ji}+3n_{ij}-2n_{ij}=3n-2n_{ij}. \tag{28}$$

Если существует $R\in\{R_0(\mathcal{G}_n^*)\}$, что в нем $i\succ j$, то $R=ijk$ или kij. Действительно, пусть $R=ikj\in\{R_0(\mathcal{G}_n^*)\}$. Отсюда и из того, что $jki\in\{R_0(\mathcal{G}_n^*)\}$ следует $n_{jk}=n_{kj}$. Поскольку

$$N(jki)=n_{jk}+n_{ji}+n_{ki}$$

$$N(kji)=n_{kj}+n_{ji}+n_{ki},$$

то отсюда, ввиду того, что $n_{ij}>n_{ji}$, получаем $N(jki)<N(kij)$. Последнее противоречит тому, что $jki\in\{R_0(\mathcal{G}_n^*)\}$.

Пусть $n_{ij}=n_1+n_2$, где n_1 — число индивидуальных профилей в $\mathcal{G}_n^*$ типа ijk, а n_2 — число индивидуальных пофилей типа kij. Поскольку $I(R,\ jki)=2$, когда $R=ijk$ или kij, то из (25) имеем:

$$N(ijk,\ \mathcal{G}_n^*)=3n_1+n_2+n_{ji},$$

$$N(kij,\ \mathcal{G}_n^*)=n_1+3n_2+n_{ji}.$$

Пусть $n_1\geqslant n_2$. Тогда $N(ijk)\geqslant N(kij)$. Для того чтобы $jki\notin\{R_0(\mathcal{G}_n^*)\}$, достаточно ввиду (28) выполнения неравенства:

$$N(jki,\ \mathcal{G}_n^*)=3n-2n_{ij}<3n_1+n_2+n_{ji}=N(ijk,\ \mathcal{G}_n^*).$$

Так как $n_{ij}+n_{ji}=n$ и $n_1+n_2=n_{ij}$, то последнее неравенство можно переписать так:

$$n_1+n_{ij}>n. \tag{29}$$

Из того, что $n_1+n_2=n_{ij}$ и $n_{ij}>\frac{2}{3}\ n$, следует, что (29) выполняется всегда, как только $n_1\geqslant n_2$. В случае $n_2\geqslant n_1$ из условия $n_{ij}\geqslant\frac{2}{3}\ n$ следовало бы, что всегда $N(jki,\ \mathcal{G}_n^*)<N(kij,\ \mathcal{G}_n^*)$. Если $\mathcal{G}_n\subset\mathcal{R}^3$, то переход от $\mathcal{G}_n$ к $\mathcal{G}_n^3$ не изменит

неравенства $n_{ij} > \frac{2}{3} n$ и, тем самым, по доказанному в $\{R_0(\mathcal{G}_n^2)\}$ не существует R_0 с $j > i$. Достаточность доказана.

Необходимость следует из примера 1.

По описанной схеме (определения 1 и 3) можно получить и другое правило группового решения, отличное от полученного, но тоже являющееся обобщением правила группового решения методом простого большинства и правила выбора недоминируемой альтернативы. Назовем это правило P-правилом.

Пусть $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$ и $\{P_0(\mathcal{G})\} \subset \mathcal{R}_0$. Напомним, что

$$t_i(R) = \sum_{1}^{m} t_i^j = \sum_{R_s \in G} \sum_{j=1}^{m} t_i^j(R_s, R).$$

Определение 4. $R' \in \{P_0(\mathcal{G})\}$ тогда и только тогда, когда:

$$\max_{R \in R_0} \prod_{i=1}^{m} t_i(R) = \prod_{i=1}^{m} t_i(R').$$

Дальше, аналогично определению 3, вводится определение 5.

Определение 5. П-решением или групповым решением по правилу P называется $R \in \{P(\mathcal{G})\}$, где $\{P(\mathcal{G})\}$ получается из $\{P_0(\mathcal{G})^2\}$ заменой:

а) если в $R_0 \in \{P_0(\mathcal{G}^2)\}$ нет перестановочных альтернатив, то

$R_0 \in \{P(\mathcal{G})\}$;

б) если в $R_0 \in \{P_0(\mathcal{G}^2)\}$ содержится отрезок перестановочных альтернатив, то $R_0 \in \{P(\mathcal{G})\}$, но R', получаемый из R_0 заменой перестановочных альтернатив отрезком эквивалентных альтернатив, принадлежит $\{P(\mathcal{G})\}$.

В конце хотел бы поблагодарить Э. И. Вилкаса за советы и исправления.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
14.IX.1969

Литература

1. A. B. Garman, M. I. Kamien, The Paradox of Voting: Probability Calculatios, Behavioral Science, 1968, Vol. 13, 4.
2. R. G. Niemi, H. S. Weisberg, Solution for the Probability of the Paradox of Voting, Behavioral Science, 1968, vol 13, 4.
3. Р Д. Льюс, Х. Райфа, Игры и решения, ИЛ, М., 1961
4. А Моркелюнас, Репрезентативные полезности индивидуальных профилей предпочтения, Лит. матем. сб., **IX**, № 3 (1969), 576–587

VIENA GRUPINIO SPRENDIMO TAISYKLĖ

A. MORKELIŪNAS

(*Reziumė*)

Grupiniam sprendiniui gauti siūlomos dvi taisyklės, kurios yra paprastos daugumos taisyklės apibendrinimai. Kad egzistuotų grupinis sprendinys pagal paprastos daugumos taisyklę, būtina sąlyga yra ta, jog, remiantis siūlomomis taisyklėmis, egzistuotų tik vienintelis sprendinys. Jei egzistuoja sprendinys pagal daugumą, tai sprendiniai pagal abi taisykles sutampa su juo. Plačiau nagrinėjama taisyklė yra gaunama iš 1 ir 3 apibrėžimų. Parodoma, jog tikimybė, kad sprendinys ne vienintelis, kai individualūs profiliai įeina į grupinį, su lygiomis tikimybėmis, artėja į 0, kai n (individų skaičius) didėja.

A RULE FOR GROUP DECISION

A. MORKELIŪNAS

(*Summary*)

Two rules are suggested to come to the group decision. The rules are the generalization of the simple majority rule. If we want the collective ranking by means of simple majority to exist it is necessary that only one decision according the to rules described should exist. If the decision according to the majority rule exists then decisions according to the two rules coincide with it. The rule drawn from the definitions 1 and 3 is examined on a larger scale. It is shown that the probability of the existence of more than one decision, whan individual rankings belong to the group ones with equal probabilities, approaches to 0 if the number of individual rankings is infinitely increasing.