XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1971

УДК 519.21

СХОДИМОСТЬ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. Бакштис

1. В теории перемножения независимых случайных величин (М-схеме) постановка предельных теорем совершенно аналогична их постановке в теории суммирования (А-схеме) [1]. Пусть

$$\zeta_n = a_n \xi_{n1} \xi_{n2} \ldots \xi_{nk_n}, \tag{1}$$

где $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ – последовательность серий независимых в сериях случайных величин, a_n – положительные постоянные, причем случайные величины ξ_{nk} являются М-предельно пренебрегаемыми: для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} \mathbf{P}\{(|\xi_{nk}|-1)^2 > \varepsilon\} = 0. \tag{2}$$

В данной работе доказаны необходимые и достаточные условия сходимости функций распределения (ф. р.) произведений (1), (2) к предельной ф. р.

Как обычно, ф. р. случайных величин ξ_{nk} обозначим $F_{nk}(x)$, элементы их характеристических преобразований (х. п.)

$$_{nk}w_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{it} \operatorname{sgn}^j x \, dF_{nk}(x), \qquad j=0, 1,$$

причем полагаем $0^{it}=0$ для любого вещественного t.

Условную ф. р. случайной величины ξ_{nk} при условии, что $\xi_{nk} \neq 0$, будем обозначать $F_{nk}(x \mid \xi_{nk} \neq 0)$. Соответственно будем обозначать и х. п. Если ξ_{nk} – М-предельно пренебрегаема, то $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n} {}_{nk}w_0(0) \to 1$ $(n\to\infty)$. Поэтому для достаточно больших n

$$_{nk}w_j(t \mid \xi_{nk} \neq 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{it} \operatorname{sgn}^j x \, dF_{nk}(x \mid \xi_{nk} \neq 0) =$$

$$= \frac{_{nk}w_j(t)}{_{nk}w_0(0)}, \qquad j=0, 1.$$

Кроме того, положим

$$\mathbf{P}\{\xi_{nk} < 0\} = c_{nk}^-, \qquad \mathbf{P}\{\xi_{nk} > 0\} = c_{nk}^+.$$

Таким образом, элементы х. п. произведения ζ_n равны

$$_nw_j(t) = a_n^{it} \prod_{k=1}^{k_n} {}_{nk}w_j(t), \qquad j=0, 1,$$

причем, согласно лемме 5 из [2],

$$
{}_n w_j(t \mid \zeta_n \neq 0) = a_n^{it} \prod_{k=1}^{k_n} {}_{nk} w_j(t \mid \xi_{nk} \neq 0) = a_n^{it} \frac{{}_n w_j(t)}{{}_n w_0(0)}, \qquad j=0,\,1.
$$

Каждой случайной величине ξ_{nk} мы сопоставим случайную величину

$$
\xi'_{nk} = \begin{cases} \xi_{nk}, & \text{если} \quad c^+_{nk} \geqslant c^-_{nk}, \\ -\xi_{nk}, & \text{если} \quad c^+_{nk} < c^-_{nk}, \end{cases}
$$

ф. р., х. п. и все параметры которой также будем обозначать штрихом. Если в (1) все случайные множители заменены случайными величинами ξ'_{nk}, то произведение будем обозначать ζ'_n. Очевидно, что условие (2) для ξ_{nk} и ξ'_{nk} выполняется только одновременно и

$$
{}_{nk} w'_0(t \mid \xi'_{nk} \neq 0) = {}_{nk} w_0(t \mid \xi_{nk} \neq 0),
$$

$$
{}_{nk} w'_1(t \mid \xi'_{nk} \neq 0) = \begin{cases} {}_{nk} w_1(t \mid \xi_{nk} \neq 0), & \text{если} \quad c^+_{nk} \geqslant c^-_{nk}, \\ -{}_{nk} w_1(t \mid \xi_{nk} \neq 0), & \text{если} \quad c^+_{nk} < c^-_{nk}; \end{cases}
$$

$$
{}_n w'_0(t \mid \zeta'_n \neq 0) = {}_n w_0(t \mid \zeta_n \neq 0),
$$

$$
{}_n w'_1(t \mid \zeta'_n \neq 0) = (-1)^{m_n} {}_n w_1(t \mid \zeta_n \neq 0),
$$

где m_n — число в (1) случайных величин, для которых $c^+_{nk} < c^-_{nk}$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Если случайные величины ξ_{nk} — М-предельно пренебрегаемы, то при $n \to \infty$*

$$
\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |{}_{nk} w'_j(t \mid \xi'_{nk} \neq 0) - {}_{nk} w'_j(0 \mid \xi'_{nk} \neq 0)| \to 0, \qquad j=0,\,1,
$$

равномерно в каждом конечном t-интервале.

Доказательство. Поскольку для достаточно больших n

$$
\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |{}_{nk} w'_j(t \mid \xi'_{nk} \neq 0) - {}_{nk} w'_j(0 \mid \xi'_{nk} \neq 0)| \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |{}_{nk} w'_j(t) - {}_{nk} w'_j(0)|}{\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant k_n} {}_{nk} w_0(0)}, \qquad j=0,\,1,
$$

и случайные велечины ξ'_{nk} также являются М-предельно пренебрегаемы, то отсюда, как видно из доказательства леммы 6 [2], вытекает утверждение леммы.

Лемма 2. *Если случайные велечины ξ_{nk} — М-предельно пренебрегаемы и при $n \to \infty$*

$$
\prod_{k=1}^{k_n} \frac{c'^+_{nk} - c'^-_{nk}}{c'^+_{nk} + c'^-_{nk}} \to C_1 > 0,
$$

то существует такая независящая от n постоянная C_2, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} c'^{-}_{nk} < C_2.$$

Доказательство. Согласно предположению о М-предельной пренебрегаемости случайных величин ξ_{nk} существует такое n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ будет $c'^{+}_{nk} + c'^{-}_{nk} > 0$ $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$, а поскольку C_1 не равно нулю, то существует такое n_1, что для всех $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$ и $1 \leqslant k \leqslant k_n$ будем иметь $c'^{+}_{nk} - c'^{-}_{nk} > 0$. Следовательно, существует логарифм

$$\ln \frac{c'^{+}_{nk} - c'^{-}_{nk}}{c'^{+}_{nk} + c'^{-}_{nk}}$$

и условие леммы можем переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{k_n} \ln \frac{c'^{+}_{nk} - c'^{-}_{nk}}{c'^{+}_{nk} + c'^{-}_{nk}} \to \ln C_1 \qquad (n \to \infty).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_2(\varepsilon)$, что для $n \geqslant \max\{n_0, n_1, n_2(\varepsilon)\}$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \ln \frac{c'^{+}_{nk} - c'^{-}_{nk}}{c'^{+}_{nk} + c'^{-}_{nk}} > \ln C_1 - \varepsilon,$$

откуда, в силу неравенства $\ln x \leqslant x - 1$ $(0 < x \leqslant 1)$, получаем

$$\sum_{k=1}^{k_n} c'^{-}_{nk} \leqslant \sum_{k=1}^{k_n} \frac{c'^{-}_{nk}}{c'^{+}_{nk} + c'^{-}_{nk}} \leqslant -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_n} \ln \frac{c'^{+}_{nk} - c'^{-}_{nk}}{c'^{+}_{nk} + c'^{-}_{nk}} < \frac{1}{2} (\varepsilon - \ln C_1).$$

Поскольку $0 \leqslant c'^{-}_{nk} \leqslant 1$, то для всех n верно неравенство

$$\sum_{k=1}^{k_n} c'^{-}_{nk} < k_{\max\{n_0, n_1, n_2(\varepsilon)\}} + \frac{1}{2} (\varepsilon - \ln C_1),$$

что и требовалось доказать.

Пусть $c > 1$ — любая постоянная. Положим

$$\beta_{nk} = \int\limits_{\frac{1}{c} < |x| < c} \ln |x| \, dF_{nk}(x \mid \xi_{nk} \neq 0).$$

Лемма 3. *Если случайные величины ξ_{nk} — М-предельно пренебрегаемы, то*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |\beta_{nk}| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Доказательство. Пусть $0<\varepsilon<\left(\frac{c-1}{c}\right)^2$. Тогда

$$|\beta_{nk}| \leqslant \int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c} \Big|\ln|x|\Big|\, dF_{nk}(x\,|\,\xi_{nk}\neq 0)=$$

$$=\int\limits_{(|x|-1)^2\leqslant\varepsilon} \Big|\ln|x|\Big|\, dF_{nk}(x\,|\,\xi_{nk}\neq 0)+$$

$$+\int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<1-\sqrt{\varepsilon}} \Big|\ln|x|\Big|\, dF_{nk}(x\,|\,\xi_{nk}\neq 0)+$$

$$+\int\limits_{1+\sqrt{\varepsilon}<|x|<c} \Big|\ln|x|\Big|\, dF_{nk}(x\,|\,\xi_{nk}\neq 0)\leqslant|\ln(1-\sqrt{\varepsilon})|+$$

$$+\ln c\int\limits_{|x|<1-\sqrt{\varepsilon}} dF_{nk}(x\,|\,\xi_{nk}\neq 0)+\ln c\int\limits_{|x|>1+\sqrt{\varepsilon}} dF_{nk}(x\,|\,\xi_{nk}\neq 0)=$$

$$=|\ln(1-\sqrt{\varepsilon})|+\mathbf{P}\{(|\xi_{nk}|-1)^2>\varepsilon\,|\,\xi_{nk}\neq 0\}\ln c\leqslant$$

$$\leqslant|\ln(1-\sqrt{\varepsilon})|+\frac{\mathbf{P}\{(|\xi_{nk}|-1)^2>\varepsilon\}}{1-\mathbf{P}\{(|\xi_{nk}|-1)^2>\varepsilon\}}\ln c,$$

откуда

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\beta_{nk}|\leqslant|\ln(1-\sqrt{\varepsilon})|+\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}\mathbf{P}\{(|\xi_{nk}|-1)^2>\varepsilon\}}{1-\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}\mathbf{P}\{(|\xi_{nk}|-1)^2>\varepsilon\}}\ln c.$$

Устремляя здесь сначала $n\to\infty$, а потом $\varepsilon\to 0$, получаем утверждение леммы.

Лемма 4. *Если случайные величины ξ_{nk} — M-предельно пренебрегаемы, то при любых постоянных $T>0$, $c>1$ и всех достаточно больших n существует такая постоянная $C_3=C_3(T, c)$, что*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|e^{-it\beta_{nk}}\,{}_{nk}w_j(t\,|\,\xi_{nk}\neq 0)-{}_{nk}w_j(0\,|\,\xi_{nk}\neq 0)|\leqslant$$

$$\leqslant C_3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\,d\Lambda_{nk}(x+\beta_{nk}),\qquad j=0,1,$$

где

$$\Lambda_{nk}(x)=\mathbf{P}\{\ln|\xi_{nk}|<x\,|\,\xi_{nk}\neq 0\}.$$

Доказательство этой леммы проходит совершенно аналогично доказательству центрального неравенства А-схемы [3, стр. 318]: для $|t|\leqslant T$ и таких n, что $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\beta_{nk}|<c$, имеем

$$|e^{-it\beta_{nk}}\,{}_{nk}w_j(t\mid\xi_{nk}\neq 0)-{}_{nk}w_j(0\mid\xi_{nk}\neq 0)|=$$

$$=\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(|x|^{it}e^{-it\beta_{nk}}-1)\operatorname{sgn}^j x\,dF_{nk}(x\mid\xi_{nk}\neq 0)\right|\leqslant$$

$$\leqslant(2+T|\beta_{nk}|)\int\limits_{|\ln|x||<\ln c}dF_{nk}(x\mid\xi_{nk}\neq 0)+$$

$$+\frac{T^2}{2}\int\limits_{|\ln|x||\geqslant\ln c}(\ln|x|-\beta_{nk})^2\,dF_{nk}(x\mid\xi_{nk}\neq 0)\leqslant$$

$$\leqslant C_3(T,c)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\ln|x|-\beta_{nk})^2}{1+(\ln|x|-\beta_{nk})^2}\,dF_{nk}(x\mid\xi_{nk}\neq 0)=$$

$$=C_3(T,c)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\,d\Lambda_{nk}(x+\beta_{nk}),\qquad j=0,\ 1,$$

т. е. верно неравенство леммы.

2. Прежде чем доказать теорему сходимости для произведений (1), (2), сделаем некоторые замечания. Поскольку мы исследуем тот тип сходимости при $n\to\infty$ ф. р. $F_n(x)$ к предельной ф. р. $F(x)$, который эквивалентен сходимости их х. п., т.е. ${}_nw_j(t)\to w_j(t)$, $j=0,\ 1$, то необходимым условием сходимости ф. р. является $F_n(0)\to F(0)$, $F_n(+0)\to F(+0)$, что эквивалентно сходимости при $n\to\infty$

$$ {}_nw_j(0)=\prod_{k=1}^{k_n}\left(c_{nk}^{+}+(-1)^j c_{nk}^{-}\right)\to\alpha_j,\qquad j=0,\ 1, \tag{3}$$

причем $\alpha_j=w_j(0)$, $j=0,\ 1$. Поэтому, если $\alpha_1\neq 0$, число m_n случайных величин ξ_{nk}, удовлетворяющих условию $c_{nk}^{+}<c_{nk}^{-}$, для всех достаточно больших n должен быть или только четным ($\alpha_1>0$), или только нечетным ($\alpha_1<0$). Значит, если имеет место (3) и $\alpha_1\neq 0$, то в очевидном равенстве

$$(-1)^{m_n}\prod_{k=1}^{k_n}(c_{nk}^{+}+c_{nk}^{-})\,{}_nw_1'(0\mid\zeta_n'\neq 0)=\prod_{k=1}^{k_n}(c_{nk}^{+}-c_{nk}^{-}) \tag{4}$$

множитель $(-1)^{m_n}$ начиная с некоторого n имеет один определенный знак.

Второе замечание касается класса $\mathfrak{M}$ М-безгранично делимых законов (М-б. д. з.), описание которого дается следующей теоремой В. М. Золотарева [1].

Ф. р. $F(x)\in\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда соответствующее ей х. п. представимо в следующей форме:

$$w_0(t)=\alpha_0 f^{(1)}(t)\,f^2(t),\qquad w_1(t)=\alpha_1\frac{f^{(1)}(t)}{f^{(2)}(t)},$$

где

а) $f^{(\nu)}(t)$, $\nu=1, 2$ — *характеристические функции* (*х. ф.*) *некоторых А-б. д. з., причем* $f^{(2)}(t)$ *имеет вид*

$$f^{(2)}(t)=\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\,dH(x)\right\}$$

$\Big(H(x)$ — *функция Леви*$\Big)$;

б) *вещественные параметры* α_0 *и* α_1 *таковы, что* $0\leqslant\alpha_0\leqslant 1$,

$$|\alpha_1|\leqslant\alpha_0\exp\left\{-2\int_{-\infty}^{+\infty}dH(x)\right\}.$$

Если $\alpha_1\geqslant 0$, *то ф. р.* $F(x)$ *принадлежит классу* $\mathfrak{M}'$.

Мы, именно, и воспользуемся классом $\mathfrak{M}'$ для того, чтобы доказать сходимость к ф. р. $F(x)\in\mathfrak{M}$. Это достигается заменой в (1) случайных величин ξ_{nk} случайными величинами ξ'_{nk}. Предельное х. п. для ζ_n можно восстановить по предельному х. п. для ζ'_n. В самом деле,

$${}_nw_0(t)={}_nw'_0(t),\qquad {}_nw_1(t)=(-1)^{m_n}\,{}_nw'_1(t).$$

Если к тому же выполнено (3), то для всех достаточно больших n степень $(-1)^{m_n}$ имеет знак, совпадающий со знаком α_1 ($\alpha_1\neq 0$).

Теорема 1. *Х. п. произведений* (1), (2) *с элементами* ${}_nw_j(t)$, $j=0, 1$, *при некотором выборе постоянных* $a_n>0$, *когда* $n\to\infty$ *сходятся к предельному х. п. тогда и только тогда, когда к некоторому х. п. сходятся х. п. с элементами*

$${}_n\tilde{w}_0(t)=a_n^{it}\prod_{k=1}^{k_n}(c_{nk}^{+}+c_{nk}^{-})\,f_n^{(1)}(t)\,f_n^{(2)}(t),\tag{5}$$

$${}_n\tilde{w}_1(t)=a_n^{it}\prod_{k=1}^{k_n}(c_{nk}^{+}-c_{nk}^{-})\,\frac{f_n^{(1)}(t)}{f_n^{(2)}(t)},\tag{6}$$

где

$$f_n^{(1)}(t)=\exp\left\{it\sum_{k=1}^{k_n}\beta_{nk}+\sum_{k=1}^{k_n}\int_0^{+\infty}(x^{it}-1)\,dF'_{nk}(xe^{\beta_{nk}}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0)\right\},$$

$$f_n^{(2)}(t)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{0}(|x|^{it}-1)\,dF'_{nk}(xe^{\beta_{nk}}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0)\right\}.$$

В случае сходимости оба предельных х. п. совпадают.

Функции (5), (6) действительно являются элементами х. п. некоторого М-б. д. з. В самом деле, х. ф. $a_n^{it}f_n^{(1)}(t)$, $f_n^{(2)}(t)$ являются х. ф. некоторых А-б. д. з., причем

$$f_n^{(2)}(t)=\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\,dH(x)\right\},$$

где

$$H(x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{k_n}[F'_{nk}(0\mid\xi'_{nk}\neq 0)-F'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}}\mid\xi'_{nk}\neq 0)], & \text{если} \quad x<0\,, \\ -\sum\limits_{k=1}^{k_n}F'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}}\mid\xi'_{nk}\neq 0), & \text{если} \quad x>0\,. \end{cases}$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\,[H(\varepsilon)-H(-\varepsilon)]\geqslant-\sum_{k=1}^{k_n}\frac{c'^{-}_{nk}}{c'^{+}_{nk}+c'^{-}_{nk}}\,,$$

откуда с помощью неравенства $\ln\,(1-x)\leqslant -x\,(0\leqslant x<1)$ получаем

$$\prod_{k=1}^{k_n}\frac{c'^{+}_{nk}-c'^{-}_{nk}}{c'^{-}_{nk}+c'^{-}_{nk}}\leqslant\exp\left\{-2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dH(x)\right\}. \tag{7}$$

Поскольку $c'^{+}_{nk}-c'^{-}_{nk}=|c^{+}_{nk}-c^{-}_{nk}|$ и $c'^{+}_{nk}+c'^{-}_{nk}=c^{+}_{nk}+c^{-}_{nk}$, то

$$\left|\prod_{k=1}^{k_n}(c^{+}_{nk}-c^{-}_{nk})\right|\leqslant\prod_{k=1}^{k_n}(c^{+}_{nk}+c^{-}_{nk})\,\exp\left\{-2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dH(x)\right\}.$$

Следовательно, функции (5), (6) удовлетворяют требованиям теоремы М-безграничной делимости.

Дальнейшему доказательству теоремы 1 предпошлем несколько лемм.

Лемма 5. *Если*

$$\prod_{k=1}^{k_n}(c^{+}_{nk}+c^{-}_{nk})\to 0 \qquad (n\to\infty)\,,$$

то элементы х. п. произведений (1), *а также элементы х. п.* (5), (6) *при* $n\to\infty$ *равномерно на всей прямой сходятся к нулю.*

Доказательство. Пусть $w_0(t)$, $w_1(t)$ – элементы х. п. любого закона распределения с ф. р. $F(x)$. Тогда

$$w_j(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|^{it}\,\mathrm{sgn}^j x\,dF(x)=$$

$$=\int\limits_{0}^{+\infty}x^{it}\,dF(x)+(-1)^j\int\limits_{-\infty}^{0}|x|^{it}\,dF(x), \qquad j=0,\,1\,,$$

откуда вытекает неравенство

$$|w_j(t)|\leqslant w_0(0), \qquad j=0,\ 1. \tag{8}$$

Поэтому при $n\to\infty$

$$|{}_nw_j(t)|\leqslant\prod_{k=1}^{k_n}(c^{+}_{nk}+c^{-}_{nk})\to 0\,,$$

$$|{}_n\tilde{w}_j(t)|\leqslant\prod_{k=1}^{k_n}(c^{+}_{nk}+c^{-}_{nk})\to 0\,.$$

Лемма 6. *Элементы х. п. ${}_n w_0(t)$ произведений* (1), (2) *при $n\to\infty$ сходятся к тождественно не равному нулю предельному элементу х. п. тогда и только тогда, когда к тождественно не равному нулю предельному элементу х. п. сходятся ${}_n\tilde{w}_0(t)$.*

В случае сходимости оба предельных элемента совпадают.

Доказательство. Сначала докажем лемму для элементов ${}_n w_0(t\mid\zeta_n\neq 0)$ и ${}_n\tilde{w}_0(t\mid\zeta_n\neq 0)=a_n^{it}f_n^{(1)}(t)\,f_n^{(2)}(t)$. Определим независимые случайные величины $\tilde{\xi}_{nk}$ посредством ф. р.

$$\Lambda_{nk}(x)=\mathbf{P}\{\ln|\xi_{nk}|<x\mid\xi_{nk}\neq 0\}. \tag{9}$$

Поскольку х. ф. случайной величины $\tilde{\xi}_{nk}$ равна $\varphi_{nk}(t)={}_{nk}w_0(t\mid\xi_{nk}\neq 0)$, то ${}_n w_0(t\mid\zeta_n\neq 0)$ является х. ф. суммы

$$\tilde{\xi}_{n1}+\tilde{\xi}_{n2}+\ldots+\tilde{\xi}_{nk_n}+\ln a_n, \tag{10}$$

причем из М-пренебрегаемости случайных величин ξ_{nk}, согласно лемме 1, следует, что

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\varphi_{nk}(t)-1|=\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|{}_{nk}w_0(t\mid\xi_{nk}\neq 0)-1|\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

равномерно в каждом конечном t-интервале, т.е. случайные величины $\tilde{\xi}_{nk}$-предельно бесконечно малые. Поэтому, согласно теореме Б. В. Гнеденко [4. стр. 119], при некотором выборе постоянных $a_n>0$ элементы ${}_n w_0(t\mid\zeta_n\neq 0)$ стремятся к элементу предельного х. п. тогда и только тогда, когда к предельной х. ф. стремятся х. ф.

$$f_n(t)=\exp\left\{it\ln a_n+\sum_{k=1}^{k_n}\left[it\,\alpha_{nk}+\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\,d\Lambda_{nk}(x+\alpha_{nk})\right]\right\},$$

где

$$\alpha_{nk}=\int_{|x|<\tau}x\,d\Lambda_{nk}(x),$$

а $\tau>0$ — любое постоянное число. Кроме того, в случае сходимости

$$\lim_{n\to\infty}{}_n w_0(t\mid\zeta_n\neq 0)=\lim_{n\to\infty}f_n(t).$$

Так как $\alpha_{nk}=\beta_{nk}$, если $c=\exp\tau$ и тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\,d\Lambda_{nk}(x+\alpha_{nk})=\int_{-\infty}^{+\infty}(|x|^{it}-1)\,dF'_{nk}(x\,e^{\beta_{nk}}\mid\xi'_{nk}\neq 0),$$

то ${}_n\tilde{w}_0(t\mid\zeta_n\neq 0)=f_n(t)$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}{}_n w_0(t\mid\zeta_n\neq 0)=\lim_{n\to\infty}{}_n\tilde{w}_0(t\mid\zeta_n\neq 0) \tag{11}$$

и из существования одного из пределов вытекает существование другого. Поскольку в этой лемме рассматривается сходимость к тождественно не равному нулю предельному элементу х. п., то, согласно (8),

$$\prod_{k=1}^{k_n}(c_{nk}^{+}+c_{nk}^{-})\to\alpha_0\neq 0 \qquad (n\to\infty).$$

Тогда из (11) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} {}_n w_0(t) = \lim_{n\to\infty} {}_n\tilde{w}_0(t),$$

причем из существования одного из пределов вытекает существование другого. Доказательство закончено.

Лемма 7. *Если ${}_n\tilde{w}_0(t)$ при $n\to\infty$ сходятся к предельному элементу х. п., тождественно не равному нулю, то элементы х. п. ${}_nw_1(t)$ произведений* (1), (2), *сходятся к предельному элементу х. п. тогда и только тогда, когда к предельному элементу х. п. сходятся ${}_n\tilde{w}_1(t)$, причем ${}_n\tilde{w}_1(t)\to 0$, когда*

$$\prod_{k=1}^{k_n} (c_{nk}^{+} - c_{nk}^{-}) \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

В случае сходимости оба предельных элемента совпадают.

Доказательство. Сначала докажем лемму для элемента условного х. п. ${}_nw_1'(t \mid \zeta_n' \neq 0)$ произведения ζ_n' и сопровождающего элемента

$${}_n\tilde{w}_1'(t \mid \zeta_n' \neq 0) = a_n^{it}\, {}_nw_1'(0 \mid \zeta_n' \neq 0)\, \frac{f_n^{(1)}(t)}{f_n^{(2)}(t)},$$

где $f_n^{(\nu)}(t)$, $\nu = 1, 2$ — такие же как и в формулировке теоремы 1, ибо

$$\beta_{nk}' = \int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c} \ln|x|\, dF_{nk}'(x \mid \xi_{nk}' \neq 0) =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c} \ln|x|\, dF_{nk}(x \mid \xi_{nk} \neq 0) = \beta_{nk}.$$

Очевидно, условие (3) выполнено как в случае сходимости ${}_nw_j(t)\to w_j(t)$, $j=0, 1$, так и в случае сходимости ${}_n\tilde{w}_j(t)\to\tilde{w}_j(t)$, $j=0, 1$. Поэтому при доказательстве данной леммы мы можем считать, что оно выполнено. Рассмотрим случаи $\alpha_1\neq 0$ и $\alpha_1 = 0$ отдельно.

а) Пусть $\alpha_1 \neq 0$. Тогда ${}_nw_1'(0 \mid \zeta_n' \neq 0) \to C_1 > 0$ при $n\to\infty$. Поскольку для любого k $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ верно неравенство ${}_nw_1'(0 \mid \zeta_1' \neq 0) \leqslant {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)$, то для всех достаточно больших n

$${}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0) \geqslant \frac{1}{2}\, C_1 \qquad (1 \leqslant k \leqslant k_n). \tag{12}$$

Поэтому, согласно лемме 1, для любого $T > 0$ при $|t| \leqslant T$ и всех достаточно больших n выполнены неравенства

$$|{}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0)| \geqslant \frac{1}{4}\, C_1 \qquad (1 \leqslant k \leqslant k_n).$$

Значит, для достаточно больших n логарифмы $\ln {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0)$ существуют и

$$\ln {}_n w_1'(t \mid \zeta_n' \neq 0) - \ln {}_n \tilde{w}_1'(t \mid \zeta_n' \neq 0) =$$
$$= \sum_{k=1}^{k_n} \{\ln {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0) - it\beta_{nk} - \ln {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0) -$$
$$- \int_{-\infty}^{+\infty} (|x|^{it} - 1) \operatorname{sgn} x \, dF_{nk}'(x e^{\beta_{nk}} \mid \xi_{nk}' \neq 0)\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \ln \frac{e^{-it\beta_{nk}} {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0)}{{}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)} - \left[\frac{e^{-it\beta_{nk}} {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0)}{{}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)} - 1 \right] \right\} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{k_n} [e^{-it\beta_{nk}} {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0) - {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)] \left[\frac{1}{{}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)} - 1 \right], \quad (13)$$

откуда

$$|\ln {}_n w_1'(t \mid \zeta_n' \neq 0) - \ln {}_n \tilde{w}_1'(t \mid \zeta_n' \neq 0)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{k_n} \left| \ln \frac{e^{-it\beta_{nk}} {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0)}{{}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)} - \left[\frac{e^{-it\beta_{nk}} {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0)}{{}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)} - 1 \right] \right| +$$
$$+ \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |e^{-it\beta_{nk}} {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0) - {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)| \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{k_n} \left| \frac{1}{{}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)} - 1 \right|. \quad (14)$$

Оценим правую часть полученного неравенства. Из неравенства

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |e^{-it\beta_{nk}} {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0) - {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |{}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0) - {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)| +$$
$$+ |t| \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |\beta_{nk}|$$

и лемм 1 и 3 вытекает, что при $n \to \infty$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |e^{-it\beta_{nk}} {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0) - {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)| \to 0$$

равномерно в каждом конечном t-интервале. Далее, так как согласно лемме 2,

$$\sum_{k=1}^{k_n} \left| \frac{1}{{}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)} - 1 \right| =$$
$$= \sum_{k=1}^{k_n} \frac{2c_{nk}'^{-}}{c_{nk}'^{+} - c_{nk}'^{-}} < \frac{4}{C_1} \sum_{k=1}^{k_n} c_{nk}'^{-} < C_4 < +\infty,$$

то при $n \to \infty$ второй член правой части неравенства (14) стремится к нулю равномерно в каждом конечном t-интервале.

Обратимся теперь к первой сумме правой части неравенства (14). Положим

$$z_{nk}(t) = \frac{e^{-it\beta_{nk}}\ {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0)}{{}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)}.$$

Поскольку для достаточно больших n

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |z_{nk}(t) - 1| \leqslant \frac{\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |{}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0) - {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)|}{\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant k_n} {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)} +$$

$$+ \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |1 - e^{-it\beta_{nk}}| < \frac{2}{C_1} \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |{}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0) -$$

$$- {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0)| + |t| \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |\beta_{nk}|, \tag{15}$$

то, согласно леммам 1 и 3, при $n \to \infty$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |z_{nk}(t) - 1| \to 0 \tag{16}$$

равномерно в каждом конечном t-интервале.

Для первой суммы правой части (14) имеем

$$\sum_{k=1}^{k_n} |\ln z_{nk}(t) - [z_{nk}(t) - 1]| \leqslant \sum_{k=1}^{k_n} |z_{nk}(t) - 1|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |z_{nk}(t) - 1| \sum_{k=1}^{k_n} |z_{nk}(t) - 1|. \tag{17}$$

Докажем, что сумма в правой части последнего неравенства ограничена. Если ${}_n\tilde{w}_0(t)$ при $n \to \infty$ стремятся к элементу некоторого предельного х. п. $\tilde{w}_0(t)$ $\left(\tilde{w}_0(0) = \alpha_0 \neq 0\right)$, то

$${}_n\tilde{w}_0(t \mid \zeta_n \neq 0) \to \frac{1}{\alpha_0} \tilde{w}_0(t),$$

причем $\frac{1}{\alpha_0} \tilde{w}_0(t)$ является х. ф. Представив ${}_n\tilde{w}_0(t \mid \zeta_n \neq 0)$ в каноническом виде

$${}_n\tilde{w}_0(t \mid \zeta_n \neq 0) = \exp\left\{it A_n + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, d\Psi_n(x)\right\},$$

где

$$A_n = \ln a_n + \sum_{k=1}^{k_n} \left\{\beta_{nk} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, d\Lambda_{nk}(x + \beta_{nk})\right\},$$

$$\Psi_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{x} \frac{u^2}{1+u^2}\, d\Lambda_{nk}(u + \beta_{nk}),$$

на основании центральной предельной теоремы А-схемы получаем, что при $n\to\infty$

$$\operatorname{Var}\Psi_n(x)=\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^2}\,d\Lambda_{nk}(u+\beta_{nk})\to\operatorname{Var}\Psi(x)<+\infty.$$

Отсюда вытекает существование такой постоянной C_5, что

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\,d\Lambda_{nk}(x+\beta_{nk})\leqslant C_5. \tag{18}$$

Теперь, согласно лемме 4,

$$\sum_{k=1}^{k_n}|z_{nk}(t)-1|\leqslant\frac{1}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}{}_{nk}w_1'(0\,|\,\xi_{nk}'\neq 0)}\sum_{k=1}^{k_n}|e^{-it\beta_{nk}}\,{}_{nk}w_1'(t\,|\,\xi_{nk}'\neq 0)-$$

$$-{}_{nk}w_1'(0\,|\,\xi_{nk}'\neq 0)|<\frac{2C_3}{C_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\,d\Lambda_{nk}(x+\beta_{nk})<\frac{C_6}{C_1}. \tag{19}$$

Из этого неравенства, а также (16) и (17) вытекает, что при $n\to\infty$

$$\sum_{k=1}^{k_n}|\ln z_{nk}(t)-[z_{nk}(t)-1]|\to 0$$

равномерно в каждом конечном t-ннтервале.

Стало быть, при $n\to\infty$

$$|\ln {}_nw_1'(t\,|\,\zeta_n'\neq 0)-\ln {}_n\tilde{w}_1'(t\,|\,\zeta_n'\neq 0)|\to 0$$

равномерно в каждом конечном t-интервале.

б) Пусть теперь $\alpha_1=0$. Тогда, поскольку $\alpha_0\neq 0$,

$${}_nw_1'(0\,|\,\zeta_n'\neq 0)=\prod_{k=1}^{k_n}\frac{|c_{nk}^+-c_{nk}^-|}{c_{nk}^++c_{nk}^-}\to 0\qquad(n\to\infty). \tag{20}$$

Если ${}_n\tilde{w}_0(t)\to\tilde{w}_0(t)$ при $n\to\infty$, где $\tilde{w}_0(t)$ — элемент х. п., то

$${}_n\tilde{w}_0(t\,|\,\zeta_n\neq 0)\to\frac{1}{\alpha_0}\,\tilde{w}_0(t),$$

причем $\frac{1}{\alpha_0}\,\tilde{w}_0(t)$ является х. ф. некоторого А-б. д. з. Поэтому

$$\varliminf_{n\to\infty}|f_n^{(2)}(t)|\geqslant\left|\frac{1}{\alpha_0}\,\tilde{w}_0(t)\right|>0$$

и

$$\varlimsup_{n\to\infty}|{}_n\tilde{w}_1'(t\,|\,\zeta_n'\neq 0)|\leqslant\lim_{n\to\infty}{}_nw_1'(0\,|\,\zeta_n'\neq 0)\frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty}|f_n^{(2)}(t)|}=0,$$

т. е. ${}_n\tilde{w}_1'(t\,|\,\zeta_n'\neq 0)\to 0$, что влечет за собой ${}_n\tilde{w}_1(t)\to 0$ $(n\to\infty)$.

С другой стороны, при выполнении условия (20) имеет место сходимость: ${}_n w_1'(t \mid \zeta_n' \neq 0) \to 0 (n \to \infty)$. Действительно, для любого заданного $\varepsilon > 0$ через $U(\varepsilon)$ обозначим множество тех n, для которых выполняется неравенство

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant k_n} {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0) < \frac{\varepsilon}{2},$$

а через $V(\varepsilon)$ – множество тех n, для которых

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant k_n} {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку нас интересует сходимость при $n \to \infty$ элемента х. п., то конечные множества $U(\varepsilon)$ и $V(\varepsilon)$ для нас никакой роли не играют. Пусть $U(\varepsilon)$ – бесконечное множество натуральных чисел $n_0 < n_1 < \ldots < n_i < \ldots$ Согласно лемме 1

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \left| \left| {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0) \right| - {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \left| {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0) - {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0) \right| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

равномерно в каждом конечном t-интервале. Поэтому для любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ при всех достаточно больших n

$$\left| {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0) \right| < {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1 \leqslant k \leqslant k_n, \ |t| \leqslant T).$$

Следовательно, для всех достаточно больших $n_i \in U(\varepsilon)$

$$\left| {}_{n_i}w_1'(t \mid \zeta_{n_i}' \neq 0) \right| < \varepsilon. \tag{21}$$

Пусть $V(\varepsilon)$ – бесконечное множество натуральных чисел $r_0 < r_1 < \ldots < r_i < < \ldots$ Для $n \in V(\varepsilon)$ имеет место (12), где $C_1 = \varepsilon$. Поэтому для $n \in V(\varepsilon)$ имеют место (13), (15), (17), (19). Из (13) и (17) находим, что для $n \in V(\varepsilon)$

$$\left| \ln {}_n w_1'(t \mid \zeta_n' \neq 0) - \ln {}_n\tilde{w}_1'(t \mid \zeta_n' \neq 0) \right| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |z_{nk}(t) - 1| \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{k_n} |z_{nk}(t) - 1| + \left(\frac{2}{\varepsilon} + 1 \right) \sum_{k=1}^{k_n} \left| e^{-it\beta_{nk}} {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0) - {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0) \right|,$$

а (15) и (19) превращаются в неравенства

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |z_{nk}(t) - 1| < \frac{2}{\varepsilon} \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \left| {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0) - {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0) \right| +$$

$$+ |t| \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |\beta_{nk}|,$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} |z_{nk}(t) - 1| < \frac{1}{\varepsilon} C_6.$$

Кроме того, согласно лемме 4 и (18),

$$\sum_{k=1}^{k_n} \left| e^{-it\beta_{nk}} {}_{nk}w_1'(t \mid \xi_{nk}' \neq 0) - {}_{nk}w_1'(0 \mid \xi_{nk}' \neq 0) \right| \leqslant C_7.$$

Из этих оценок, воспользовавшись неравенством $|\ln|z_1|-\ln|z_2||\leqslant|\ln z_1-\ln z_2|$, находим, что

$$\ln|{}_n w_1'(t\,|\,\zeta_n'\neq 0)|\leqslant \ln|{}_n\tilde{w}_1'(t\,|\,\zeta_n'\neq 0)|+\frac{C_6}{\varepsilon^2}\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|{}_{nk}w_1'(t\,|\,\xi_{nk}'\neq 0)-$$

$$-{}_{nk}w_1'(0\,|\,\xi_{nk}'\neq 0)|+\frac{C_6}{\varepsilon}|t|\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\beta_{nk}|+\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)C_7.$$

Поэтому

$$\varlimsup_{i\to\infty}\ln|{}_{r_i}w_1'(t\,|\,\zeta_{r_i}'\neq 0)|=-\infty,$$

т.е. ${}_{r_i}w_1'(t\,|\,\zeta_{r_i}'\neq 0)\to 0$ при $i\to\infty$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ при всех достаточно больших $r_i\in V(\varepsilon)$

$$|{}_{r_i}w_1'(t\,|\,\zeta_{r_i}'\neq 0)|<\varepsilon. \tag{22}$$

Поскольку $U(\varepsilon)\cup V(\varepsilon)$ представляет собой все множество натуральных чисел, то (21) и (22) показывают, что ${}_n w_1'(t\,|\,\zeta_n'\neq 0)\to 0$ при $n\to\infty$.

Таким образом, для ${}_n w_1'(t\,|\,\zeta_n'\neq 0)$ и ${}_n\tilde{w}_1'(t\,|\,\zeta_n'\neq 0)$ лемма доказана. Остается перейти к элементам х. п. ${}_n w_1(t)$ и ${}_n\tilde{w}_1(t)$. Поскольку

$${}_n w_1(t)=(-1)^{m_n}\prod_{k=1}^{k_n}(c_{nk}^{+}+c_{nk}^{-})\;{}_n w_1'(t\,|\,\zeta_n'\neq 0),$$

то ${}_n w_1(t)$ сходятся к предельному элементу х. п. тогда и только тогда, когда к предельному элементу х. п. сходятся

$$(-1)^{m_n}\prod_{k=1}^{k_n}(c_{nk}^{+}+c_{nk}^{-})\;{}_n\tilde{w}_1'(t\,|\,\zeta_n'\neq 0)=$$

$$=(-1)^{m_n}a_n^{it}\prod_{k=1}^{k_n}(c_{nk}^{+}+c_{nk}^{-})\,{}_n w_1'(0\,|\,\zeta_n'\neq 0)\,\frac{f_n^{(1)}(t)}{f_n^{(2)}(t)}.$$

Отсюда, с учетом (4), вытекает, что ${}_n w_1(t)$ сходятся к предельному элементу х. п. тогда и только тогда, когда к предельному элементу х. п. сходятся (6), а предельные элементы совпадают. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимо. Пусть элементы х. п. ${}_n w_j(t)$, $j=0,1$ произведений (1), (2) при $n\to\infty$ сходятся к предельным элементам х. п. $w_j(t)$, $j=0,1$. Тогда выполнено условие (3). Если $\alpha_0=0$, то, согласно лемме 5, при $n\to\infty$ как ${}_n w_j(t)\to 0$, $j=0,1$, так и ${}_n\tilde{w}_j(t)\to 0$, $j=0,1$. Если же $\alpha_0\neq 0$, то при $n\to\infty$, согласно леммам 6 и 7, ${}_n\tilde{w}_j(t)\to w_j(t)$, $j=0,1$.

Достаточно. Пусть элементы х. п. (5), (6) при $n\to\infty$ сходятся к предельным элементам х. п. $w_j(t)$, $j=0,1$. Тогда выполнено условие (3) и, согласно леммам 5, 6 и 7, элементы х. п. ${}_n w_j(t)$, $j=0,1$, произведений (1), (2) сходятся к $w_j(t)$, $j=0,1$. Теорема доказана.

3. Исходя из этой теоремы можно строить центральную предельную теорему М-схемы двумя различными способами:

1) выполнено условие (3) и при $n\to\infty$

$$a_n^{it} f_n^{(1)}(t)\to f^{(1)}(t), \qquad f_n^{(2)}(t)\to f^{(2)}(t);$$

2) выполнено условие (3) и при $n\to\infty$

$$a_n^{it} f_n^{(1)}(t)\, f_n^{(2)}(t)\to f(t), \qquad f_n^{(2)}(t)\to f^{(2)}(t),$$

где $f^{(1)}(t)$, $f^{(2)}(t)$ и $f(t)$ — х. ф. некоторых А-б. д. з., причем $f^{(2)}(t)$ удовлетворяет условиям, наложенным на нее в теореме М-безграничной делимости.

Положим

$$\Psi_n^{(\nu)}(x)=(-1)^{\nu-1}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{x}\frac{u^2}{1+u^2}\,dF'_{nk}\left((-1)^{\nu-1}e^{u+\beta_{nk}}\mid \xi'_{nk}\neq 0\right), \quad \nu=1,2,$$

$$\gamma_n^{(1)}=\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\beta_{nk}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dF'_{nk}(e^{x+\beta_{nk}}\mid \xi'_{nk}\neq 0)\right\},$$

$$\gamma_n^{(2)}=-\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}}\mid \xi'_{nk}\neq 0),$$

$$(\gamma,\ \Psi)=it\gamma+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\Psi(x),$$

где $\Psi(x)$ — с точностью до постоянного множителя является ф. р.

Сходимость, когда $\Psi_n(x)\to\Psi(x)$ при $n\to\infty$ не только слабо, но и $\Psi_n(+\infty)\to\Psi(+\infty)$, будем обозначать $\Psi_n(x)\overset{\text{вп}}{\to}\Psi(x)$ (сходится вполне).

Если х. ф. $f^{(2)}(t)$ из теоремы М-безграничной делимости представить в каноническом виде $\exp(\gamma^{(2)},\ \Psi^{(2)})$, то условия, наложенные на эту х. ф., принимают вид

$$\gamma^{(2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\,d\Psi^{(2)}(x), \tag{23}$$

$$|\alpha_1|\leqslant\alpha_0\exp\left\{-2\int_{-\infty}^{+\infty}dH(x)\right\}, \tag{24}$$

где

$$H(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{1+u^2}{u^2}\,d\Psi^{(2)}(u), & \text{если } x<0,\\ \displaystyle-\int_{x}^{+\infty}\frac{1+u^2}{u^2}\,d\Psi^{(2)}(u), & \text{если } x>0.\end{cases}$$

Первый вариант центральной предельной теоремы М-схемы представляет собой теорему.

Теорема 2. *Для сходимости ф. р. произведений* (1), (2) *к закону класса* $\mathfrak{M}$, *определяемому посредством* $\alpha_0\neq 0$, α_1, $f^{(1)}(t)=\exp(\gamma^{(1)},\ \Psi^{(1)})$ и $f^{(2)}(t)=\exp(\gamma^{(2)},\ \Psi^{(2)})$, *удовлетворяющих условиям* (23), (24), *необходимо и достаточно выполнения следующих условий.*

В случае $\alpha_1 \neq 0$: *при* $n \to \infty$

а) $\prod\limits_{k=1}^{k_n} \left(c_{nk}^{+} + (-1)^j c_{nk}^{-}\right) \to \alpha_j, \qquad j=0, 1;$

б) $\Psi_n^{(\nu)}(x) \overset{\text{вп.}}{\to} \Psi^{(\nu)}(x), \qquad \nu = 1, 2,$

$\gamma_n^{(1)} + \ln a_n \to \gamma^{(1)},$

$\gamma_n^{(2)} \to \gamma^{(2)}.$

В случае $\alpha_1 = 0$ *условие* а) *сохраняется, а* б) *заменяется на*

б′) $\Psi_n^{(1)}(x) + \Psi_n^{(2)}(x) \overset{\text{вп.}}{\to} \Psi^{(1)}(x) + \Psi^{(2)}(x),$

$\gamma_n^{(1)} + \gamma_n^{(2)} + \ln a_n \to \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}.$

Доказательство. Пусть ${}_n w_j(t)$, $j=0, 1$ — элементы х. п. произведения (1), (2), а

$$w_0(t) = \alpha_0 f^{(1)}(t) f^{(2)}(t), \qquad w_1(t) = \alpha_1 \frac{f^{(1)}(t)}{f^{(2)}(t)}$$

— элементы х. п. предельного закона. Поскольку

$$a_n^{it} f_n^{(1)}(t) = \exp\left\{it(\gamma_n^{(1)} + \ln a_n) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, d\Psi_n^{(1)}(x)\right\},$$

$$f_n^{(2)}(t) = \exp\left\{it\gamma_n^{(2)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, d\Psi_n^{(2)}(x)\right\},$$

то, согласно теореме сходимости [3, стр. 314], условие б) является необходимым и достаточным для сходимости при $n \to \infty$

$a_n^{it} f_n^{(1)}(t) \to \exp(\gamma^{(1)}, \Psi^{(1)}),$

$f_n^{(2)}(t) \to \exp(\gamma^{(2)}, \Psi^{(2)}).$

Поэтому в случае, когда

$$\prod_{k=1}^{k_n} (c_{nk}^{+} - c_{nk}^{-}) \to \alpha_1 \neq 0 \qquad (n \to \infty),$$

согласно теореме 1, условия а) и б) являются необходимыми и достаточными для сходимости ${}_n w_j(t) \to w_j(t)$, $j=0, 1$, при $n \to \infty$.

Если $\alpha_1 = 0$, то, согласно леммам 6 и 7, ${}_n w_0(t) \to w_0(t)$, ${}_n w_1(t) \to 0$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда выполнено условие а) и

$$a_n^{it} f_n^{(1)}(t) f_n^{(2)}(t) \to f^{(1)}(t) f^{(2)}(t),$$

а эта сходимость имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие б′). Теорема доказана.

В некоторых случаях второй способ построения центральной предельной теоремы М-схемы может оказаться более полезным. При этом способе построения предельное х. п. задается посредством $w_0(t)$, α_1 и $f^{(2)}(t)$.

Теорема 3. *Для сходимости ф. р. произведений* (1), (2) *к закону класса* $\mathfrak{M}$, *определяемому посредством* $w_0(t)$ $\left(w_0(0) \neq 0\right)$, α_1 *и* $f^{(2)}(t) = \exp(\gamma^{(2)}, \Psi^{(2)})$, *удовлетворяющим условиям* (23), (24), *необходимо и достаточно выполнения следующих условий.*

В случае $\alpha_1 \neq 0$: *при* $\to \infty$

$$\text{а)} \quad \prod_{k=1}^{k_n} \left(c_{nk}^{+} + (-1)^j c_{nk}^{-} \right) \to \alpha_j, \qquad j = 0, 1,$$

причем $\alpha_0 = w_0(0)$;

б) *суммы* $\tilde{\xi}_{n1} + \tilde{\xi}_{n2} + \ldots + \tilde{\xi}_{nk_n} + \ln a_n$, *где* $\tilde{\xi}_{nk}$ — *независимые случайные величины с ф. р.* (9), *имеют предельным закон с х. ф.* $\frac{1}{\alpha_0} w_0(t)$;

$$\text{в)} \quad \Psi_n^{(2)}(x) \overset{\text{вп}}{\to} \Psi^{(2)}(x),$$

$$\gamma_n^{(2)} \to \gamma^{(2)}.$$

В случае $\alpha_1 = 0$ *условия* а) *и* б) *сохраняются, а условие* в) *становится излишним.*

Доказательство. Пусть ${}_n w_j(t)$, $j = 0, 1$, — элементы х. п. произведений (1), (2). Если $\alpha_1 \neq 0$, то, согласно теореме 1, ${}_n w_j(t) \to w_j(t)$, $j = 0, 1$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда ${}_n \tilde{w}_j(t) \to w_j(t)$, $j = 0, 1$. А эта сходимость имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие а) и

$$a_n^{it} f_n^{(1)}(t) f_n^{(2)}(t) = \frac{{}_n \tilde{w}_0(t)}{{}_n w_0(0)} \to \frac{w_0(t)}{\alpha_0}, \tag{25}$$

$$f_n^{(2)}(t) \to f^{(2)}(t). \tag{26}$$

Если выполнено условие а), то сходимость (25) имеет место тогда и только тогда, когда ${}_n \tilde{w}_0(t) \to w_0(t)$ $(n \to \infty)$, откуда, согласно лемме 6, вытекает, что (25) имеет место тогда и только тогда, когда

$${}_n w_0(t \mid \zeta_n \neq 0) = \frac{{}_n w_0(t)}{{}_n w_0(0)} \to \frac{w_0(t)}{\alpha_0} \qquad (n \to \infty). \tag{27}$$

Таким образом, ${}_n w_j(t) \to w_j(t)$, $j = 0, 1$, при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда выполнены условия а), (26) и (27). Согласно теореме сходимости [3, стр. 314], условие (26) выполнено тогда и только тогда, когда выполнено в). Поскольку ${}_n w_0(t \mid \zeta_n \neq 0)$ является х. ф. суммы (10), то условие (27) может быть заменено условием б).

Если $\alpha_1 = 0$, то, согласно леммам 6 и 7, ${}_n w_1(t) \to 0$ $(n \to \infty)$, когда ${}_n w_0(t) \to$ $\to w_0(t)$ $(n \to \infty)$. Поэтому в данном случае необходимо рассмотреть сходимость только элемента х. п. ${}_n w_0(t)$, что, как уже видели, приведет к условиям а) и б). Теорема доказана.

Пользуюсь случаем поблагодарить Й. П. Кубилюса за просмотр рукописи и сделанные замечания.

Каунасский политехнический
институт, Шяуляй

Поступило в редакцию
18.VI. 1970

Литература

1. В. М. Золотарев, Общая теория перемножения независимых случайных величин, ДАН СССР, **142**, № 4 (1962), 788–791.
2. А. Бакштис, О предельных законах распределения мультипликативных арифметических функций (III), Лит. матем. сб., VIII, 4 (1968), 643–680.
3. М. Лоэв, Теория вероятностей, М., 1962.
4. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949.

NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SANDAUGŲ PASISKIRSTYMO DĖSNIŲ KONVERGAVIMAS

A. Bakštys

(*Reziumė*)

Sakykime, $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}$ $(n=1,2,\ldots)$ – seka atsitiktinių dydžių serijų, kuriose atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi ir kiekvienam $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} \mathbf{P}\{(|\xi_{nk}|-1)^2>\varepsilon\}=0.$$

Darbe įrodyta sandaugų

$$\zeta_n=a_n^{it}\,\xi_{n1}\,\xi_{n2}\cdots\xi_{nk_n}$$

(čia a_n – teigiamos konstantos) centrinė ribinė teorema.

KONVERGENZ DER VERTEILUNGEN VON PRODUKTE UNABHÄNGIGER ZUFÄLLIGER VERÄNDERLICHER

A. Bakštys

(*Zusammenfassung*)

Es sei $\zeta_{n1}, \zeta_{n2}, \ldots, \zeta_{nk_n}$ $(n=1,2,\ldots)$ eine Folge von Serien der zufälliger Veränderlicher, dei in jeder Serie unabhängig sind und für jedes $\varepsilon>0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} \mathbf{P}\{(|\xi_{nk}|-1)^2>\varepsilon\}=0.$$

In der Arbeit ist der zentrale Grenzwertsatz für Produkte

$$\zeta_n=a_n\,\xi_{n1}\,\xi_{n2}\cdots\xi_{nk_n}$$

bewiesen, wobei a_n positive Konstanten sind.