УДК 511

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММ ВИДА $\Sigma\varphi(2^k t)$

Г. А. Мисявичус

1. Пусть Tt – преобразование интервала $(0, 1)$ в себя, задаваемое соотношением $Tt=\{2t\}$, где фигурные скобки означают дробную часть.

Положим для некоторой измеримой на $(0, 1)$ функции $\varphi(t)$ с $\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt=0$

$$S_n=\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(T^j t), \qquad Z_n=\frac{S_n}{B_n},$$

$$B_n^2=D\,S_n=\int\limits_0^1 S_n^2\,dt, \qquad f_S(t)=\int\limits_0^1 e^{itS(\tau)}\,d\tau, \tag{1*}$$

$$F_n(x)=\operatorname*{mes}_{t\in(0,\,1)}\{Z_n<x\}.$$

В работах Й. П. Кубилюса [1], А. Г. Постникова [2], И. А. Ибрагимова [3], В. И. Ладохина и Д. А. Москвина [4] исследовалась скорость сходимости $F_n(x)$ к нормальному закону. Настоящая работа посвящена асимптотическому разложению характеристических функций $f_{S_n}(t)$. Это разложение дает возможность расширить класс функций, для которых оценивается скорость сходимости. Сходные результаты для функций от элементов цепных дробей получены автором в работе [12].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

I. $M|\varphi(t)|^{s+\delta}=\int\limits_0^1|\varphi(t)|^{s+\delta}\,dt<\infty$ *для целых* $s\geqslant 3$, $0<\delta<1$ – *любое положительное число.*

II. *Для некоторой константы* A *и* $\gamma>\max\left(10,\ \frac{2(s+\delta-2)}{\delta}\right)$ *имеет место*

$$\int\limits_0^1|\varphi(t+h)-\varphi(t)|^2\,dt\leqslant A\log^{-\gamma}\frac{1}{h}.$$

III.

$$\sigma^2=\int\limits_0^1\varphi^2(t)\,dt+\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_0^1\varphi(t)\,\varphi(T^j t)\,dt\neq 0.$$

Тогда при любом $0 < a < \infty$ в интервале

$$|t| \leqslant a \log^{\frac{1}{2}} (1 + L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}) \tag{2*}$$

имеет место разложение

$$f_{Z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_{\nu n}(it) L_{sn}^{\frac{\nu-2}{s-2}} + \Theta_1 (|t|^s + |t|^{3s-2}) L_{sn} \right) +$$
$$+ \Theta_2 |t| L_{sn}. \tag{3*}$$

Здесь обозначено

$$L_{sn} = \frac{M\,|f(t)|^s n^{-\frac{s(s-1)}{\gamma-4+2s}+1}}{B_n^s}, \tag{4*}$$

$P_{\nu n}(it)$ *является многочлен относительно it с равномерно относительно n ограниченными коэффициентами, степени не выше 3ν.*

Теорема 2. *Пусть в условии I $s = 3$, а в условии II*

$$\gamma > \max\left(4, \frac{2(1+\delta)}{\delta}\right).$$

Тогда

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| < \frac{c_1}{n^{\frac{1}{2} - \frac{3}{4+\gamma}}}.$$

Теорема 3. *Если выполнено условие I с $s = 3$ и при некотором положительном β*

$$\int_0^1 |\varphi(t+h) - \varphi(t)|^2\, dt \leqslant A_1 h^\beta, \tag{1}$$

то

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{c_{11} \log n}{\sqrt{n}}.$$

2. При доказательстве будем использовать методику, разработанную В. А. Статулявичусом в работах [7–10].

Обозначим

$$\eta_{j+1} = f(T^j t), \quad \eta_j^u = M\{\eta_j \mid \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j+u}\}, \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

где $\varepsilon_1, \ldots$ — функции Радемахера. И. А. Ибрагимовым в [5] показано, что условие II влечет за собой оценки

$$M|\eta_j - \eta_j^u| \leqslant \frac{A_\gamma}{u^\gamma} \tag{2}$$

и

$$M|M\{\eta_j^u \mid \varepsilon_j, \ldots, \varepsilon_{j+u}\} - \eta_j^u| \leqslant \frac{A_\gamma}{u^\gamma}. \tag{2'}$$

Приведем несколько нужных нам для дальнейшего соотношений, которые вытекают из условий теорем

$$D S_n = \sigma^2 n + \Theta_n, \quad |\Theta_n| < c_1, \tag{3}$$

$$D \tilde{S}_n = D \left(\sum_{j=1}^{n} \eta_j^u \right) = \sigma_u^2 n + \Theta_u, \quad |\Theta_u| < c_2, \tag{4}$$

$$|\sigma - \sigma_u| \leqslant \frac{c_3}{u^{\frac{\gamma}{2}-1}}, \tag{5}$$

где обозначено $\tilde{S}_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j^u$.

Эти соотношения несложно проверяются по аналогии с оценками, проведенными в [3, 5]

3. Как известно, $T^j t = \frac{\varepsilon_j}{2} + \frac{\varepsilon_{j+1}}{2^2} + \ldots$ Обозначим

$$\zeta_j^u = \frac{\varepsilon_j}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_{j+u}}{2^u}.$$

Лемма 1. *Величины ζ_j^u представляют собой цепь Маркова.*

Доказательство. Очевидно, что каждому значению ζ_j^u соответствует единственный набор $\varepsilon_j, \ldots, \varepsilon_{j+u}$. Поэтому σ-алгебра F_u, порожденная величинами $\zeta_{j_1}^u, \ldots \zeta_{j_k}^u$, совпадает с σ-алгеброй, порожденной $\varepsilon_{j_1}, \ldots \varepsilon_{j_k+u}$. Следовательно, для доказательства леммы достаточно установить, что для любого множества $A \in F_u$ имеет место равенство

$$\int\limits_A \operatorname{mes} \left\{ \zeta_j^u < \lambda - \left(\frac{\varepsilon_j}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_{j-j_1+u}}{2^{j-j_1+u}} \right) \right\} dt = \operatorname{mes} \{ t \in A, \ \zeta_j^u < \lambda \}.$$

Но это равенство выводится дословным повторением рассуждений на стр. 83 в [13].

Пусть, далее, F_k — наименьшая σ-алгебра, порожденная η_k^u, Ω_k — пространство значений η_k^u. Тогда для коэффициента эргодичности, определяемого соотношением

$$\alpha_{kl} = 1 - \sup_{\substack{A \in F_l \\ \eta_k^u, \ \tilde{\eta}_k^u \in \Omega_k}} |\operatorname{mes}\{A \mid \eta_k^u\} - \operatorname{mes}\{A \mid \tilde{\eta}_k^u\}|,$$

справедливо равенство

$$\alpha_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k - l \leqslant u, \\ 1 & \text{при} \quad k - l \geqslant u + 1. \end{cases}$$

Величины η_j^u, будучи измеримы относительно σ-алгебры F_j, являются случайными величинами, связанными в цепь Маркова.

3. Доказательство теоремы 1. Схема доказательства и многие оценки леммы 11 из [7] в нашем случае остаются в силе.

Введем „урезанные“ случайные величины

$$\tilde{\eta}_k = \begin{cases} \eta_k^u, & \text{если} \quad |\eta_k^u| < C^{(n)}, \\ 0, & \text{если} \quad |\eta_k^u| > C^{(n)}, \end{cases} \tag{6}$$

$$\eta_k^u = \tilde{\eta}_k + \tilde{\tilde{\eta}}_k, \qquad S_n' = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\eta}_k, \qquad S_n'' = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\tilde{\eta}}_k,$$

$$C^{(n)} = \frac{B_n^{(u)}}{u\,\rho^{(n)}}, \qquad B_n^{(u)2} = D\,S_n,$$

$$\rho^{(n)} = 2\sqrt{2}\; Ha \sqrt{\log(1 + K_{sn}^{-\frac{1}{s-2}})}, \qquad K_{sn} = \frac{n\,M\,|\eta_1^u|^s u^{s-1}}{B_n^{(u)s}}.$$

Для семиинвариантов $\Gamma_r\{S_n'\}$ суммы S_n' имеет место неравенство, выведенное в [12], используя лемму 7 из [7]:

$$|\Gamma_r\{S_n'\}| \leqslant r!\; H_0 H_3^{r-2} s^{r-2} D\,S_n' \cdot C^{(n)}. \tag{7}$$

Для оценки отношения $D\,\tilde{S}_n$ и $D\,S_n'$ имеем

$$D\,\tilde{S}_n = D\,S_n' + D\,S_n'' + 2M\,(S_n' - M\,S_n')\,(S_n'' - M\,S_n''). \tag{8}$$

Не вводя новых обозначений для центрированных величин и имея в виду стационарность, представим последний член этого соотношения в форме

$$n \sum_{j=2}^{n} M\,\tilde{\eta}_1\,\tilde{\tilde{\eta}}_j = n \sum_{j=2}^{n} M\,(\tilde{\eta}_1 - M\,\{\tilde{\eta}_1 \,|\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{j}{2}}\})\,\tilde{\tilde{\eta}}_j.$$

Каждый член правой суммы оценивается при помощи неравенств Гелдера, Йенсена и (2′)

$$M\,(\tilde{\eta}_1 - M\,\{\tilde{\eta}_1 \,|\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{j}{2}}\})\,\tilde{\tilde{\eta}}_j \leqslant M^{\frac{1}{r}}\,(\tilde{\eta}_1 - M\,\{\tilde{\eta}_j \,|\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{j}{2}}\})^r\, M^{\frac{r-1}{r}}\,|\tilde{\tilde{\eta}}_j|^{\frac{r}{r-1}} \leqslant$$

$$\leqslant C^{(n) - \frac{r(s-2+\delta)-s+2-\delta}{r}}\,\frac{1}{\left(\frac{j}{2}\right)^{\frac{\gamma}{2r}}}\,(M\,|\eta_1^u|^{s+\delta})^{\frac{r-1}{r}}. \tag{9}$$

Подберем

$$r = \frac{s+\delta-2}{\delta}. \tag{10}$$

Тогда, учитывая выбор γ в условии I, из соотношения (8) извлечем

$$\frac{D\,S_n'}{B_n^{(u)2}} = 1 + C_{\delta,s}\,K_{sn}. \tag{11}$$

Используя оценку для семиинвариантов (7) и (11), получаем разложение, аналогичное разложению (3.96) из [7]:

$$\log f_{Z_n'}(t) = \sum_{r=2}^{\mu} \frac{\Gamma_r(S_n')}{r!}\left(\frac{it}{B_n^{(u)}}\right)^r + \vartheta_\mu \left(\frac{C^{(n)}\,s}{B_n^{(u)}}\right)^{\mu-2} |t|^\mu + c_{\delta,s}\,|t|^2 K_{sn} \tag{12}$$

для

$$|t| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2H_6}} \quad \frac{B_n(u)}{uC^{(n)}}. \tag{13}$$

Представим S'_n в виде

$$S'_n = \sum_{k=1}^{N} Y'_k, \qquad Y'_k = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} \eta^u_j,$$

$r_k = k[u+1]$, $k=0, 1, \ldots, N-1$; N определяется из неравенства $r_{N-2} < n < r_{N-2} + [u+1]$. Y_k представляют собой случайные величины, связанные в цепь Маркова с коэффициентами эргодичности β_{kl}, удовлетворяющими неравенствам

$$1 - \beta_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad l-k \geqslant 2, \\ 1, & \text{если} \quad l-k = 1. \end{cases}$$

Поэтому выкладки леммы 11 в [7] с очевидными изменениями приводят к равенству

$$\log f_{Z'_n}(t) = \sum_{r=2}^{s} \frac{\Gamma_r\{S'_n\}}{r!} \left(\frac{it}{B_n^{(u)}}\right)^r + c_\delta^{(1)}(|t|^2 + |t|^s) \frac{k_{s+\delta, n}}{\rho^{(n)(1-\delta)}}, \tag{14}$$

причем

$$\frac{|\Gamma_r\{S'_n\}|}{B_n^{(u)r}} \leqslant \Theta_{r,u} K_{sn}^{\frac{r-2}{s-2}}, \tag{15}$$

где $\Theta_{r,u}$ удовлетворяют неравенству

$$|\Theta_{r,u}| \leqslant r!\, H^{r-2},$$

так как

$$\frac{|\Gamma_r\{S'_n\}|}{(\sqrt{DS'_n})^r} \leqslant \Theta_{r,u} \left(\frac{nM|\eta'|^r}{(\sqrt{DS'_n})^r}\right)^{\frac{r-2}{s-2}}. \tag{16}$$

Вспомнив оценки (11) и (15), будем иметь

$$\lambda_{rn} = \frac{\Gamma_r\{S'_n\}}{B_n^r} = L_{sn}^{\frac{r-2}{s-2}} \Theta_{r,u}(1 + c_4 L_{sn}),$$

$$\frac{\Gamma_2\{S'_n\}}{B_n} = 1 + c^{(2)}_{\delta,s} L_{sn},$$

если в (6) положить $u = n^{\frac{s}{\gamma-4+2s}}$. Оценки (15) позволяют повторить доказательство в [9], которое дает следующее разложение для

$$f_{Z''_n}(t), \quad Z''_n = \frac{S'_n}{B_n},$$

$$f_{Z''_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-2} P_{\nu n}(it) L_{sn}^{\frac{\nu}{s-2}} + c^{(3)}_{s,\delta}(|t|^{s+1} + |t|^{3(s-1)}) L_{sn}\right). \tag{18}$$

Оценим

$$M|S_n - S'_n| \leqslant M|S_n - \tilde{S}_n| + M|\tilde{S}_n - S'_n|.$$

Вспомнив определение $\tilde{\tilde{\eta}}_k$, немедленно получаем

$$M\,|\,\tilde{S}_n - S'_n\,| \leqslant \frac{n\,2^s M\,|\,\tilde{\tilde{\eta}}_1\,|^{s+\delta}}{C^{(n)\,s-1+\delta}} \leqslant c_\delta^{(2)} L_{sn} B_n\,, \tag{19}$$

$$M\,|\,S_n - \tilde{S}_n\,| \leqslant n\sqrt{M\,|\,\eta_1 - \eta_1^u\,|} \leqslant L_{sn}\,. \tag{20}$$

Поэтому

$$\left|f_{Z_n}(t) - f_{Z_n''}(t)\right| = \frac{\Theta_3\,|\,t\,|\,M\,|\,S_n - S'_n\,|}{B_n} = \Theta_\delta^{(3)}\,|\,t\,|\,L_{s n}\,. \tag{21}$$

Из (13), (18) и (21) следует утверждение теоремы.

4. Лемма 2. *В условиях теоремы 2 существует абсолютная константа C такая, что при*

$$|\,t\,| \leqslant C\,\frac{\sigma_u^3 \sqrt{n}}{u}$$

имеет место оценка

$$|f_{\tilde{Z}_n}(t)| \leqslant e^{-\frac{t^2}{3\pi^2}}\,, \qquad \left(\tilde{Z}_n = \frac{\tilde{S}_n}{B_n^{(u)}}\right).$$

Доказательство. Уточним для нашего случая доказательство леммы 12 в [7].

Обозначим

$$f_{kl}(t, \omega, A) = \int\limits_{\Omega_{k+1}} \ldots \int\limits_{\Omega_{l-1}} \int\limits_{A} e^{it\tilde{S}_{kl}}\, m(d\,\omega_{k+1}\,|\,\omega) \ldots m(d\,\omega_l\,|\,\omega_{l-1}), A \in \mathcal{F}_l\,.$$

Для любого набора целых чисел $1 \leqslant l_1 < l_2 \ldots < l_N = n$ справедливо неравенство

$$|f_{\tilde{S}_n}(t)| \leqslant \|f_{1 l_1}(t, \omega)\| \prod_{p=1}^{N} \sup_{\omega_p \in \Omega_p} \|f_{l_p, l_{p+1}}(t, \omega_p, \cdot)\|,$$

где

$$\|f_{kl}(t, \omega_k, \cdot)\| = \int\limits_{\Omega_l} |f_{kl}(t, \omega_k, d\omega)|.$$

Вспомнив, что при $k - r > u$ величины η_r^u и η_k^u независимы, будем иметь для любого множителя $\|f_{sl}(t, \omega, \cdot)$ и любого целого r такого, что $k - r > u$, $r < k < l$,

$$\|f_{rl}(t, \omega, \cdot)\| \leqslant M\,|f_{S_{kl}}(t\,|\,\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_l)|,$$

где $\mathcal{F}_k$ — наименьшая σ-алгебра, порожденная η_k^u.

Подберем

$$k_1 = 0 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_N = n$$

так, чтобы было

$$k_{i+1} - l_i = s + 1, \quad l_i - k_i = l_{i-1} - k_{i-1},$$

$$N - 1 = \left[\frac{n}{k_2 - k_1}\right], \quad l_{N-1} = \min(k_{N-1} + l_1 - k_1, n)\,.$$

Тогда неравенство (3.106) из [7] примет вид

$$|f_{\tilde{S}_n}(t)| \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(1-M|f_{\tilde{S}_{k_i l_i}}(t|\mathcal{F}_{k_i}\times\mathcal{F}_{l_i})|. \tag{23}$$

В цитируемой работе выведено, что

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(1-M|f_{S_{k_i l_i}}(t|\mathcal{F}_{k_i}\times\mathcal{F}_{l_i})| =$$

$$= \frac{t^2}{2}\left\{\sum_{i=1}^{N-1} D\tilde{S}_{k_i l_i} = \sum_{i=1}^{N-1} DM\{\tilde{S}_{k_i l_i}|\mathcal{F}_{k_i}\times\mathcal{F}_{l_i}\} - \sum_{i=1}^{N} R_{k_i l_i}\right\}, \tag{24}$$

где

$$R_{k_i l_i} \leqslant 32(R_i' + R_i''), \tag{25}$$

$$R_i' = \int\limits_{|x|>\frac{\pi}{4|t|}} x^2\, dF_{S_{k_i l_i}}(x), \quad R_i'' = \int\limits_{|x|>\frac{\pi}{4|t|}} x^2\, dF_{S''_{k_i l_i}}(x).$$

Положим

$$C^{(n)} = d\,\frac{M|\eta_1^u|^3}{\sigma_u^2}, \tag{26}$$

$$\tilde{\eta}_k = \begin{cases} \eta_k^u & \text{при} \quad |\eta_k^u| < C^{(n)}, \\ 0, & \text{если} \quad |\eta_k^u| > C^{(n)}, \end{cases} \tag{27}$$

$$\tilde{\tilde{\eta}}_k = \eta_k^u - \tilde{\eta}_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$S_n' = \sum_{k=1}^{n}\tilde{\eta}_k, \quad S_n'' = \sum_{k=1}^{n}\tilde{\tilde{\eta}}_k, \quad \tilde{B}_n^2 = D\,S_n',$$

$\tilde{\tilde{B}}_n^2 = D\,S_n''$. Аналогично вводится $\tilde{S}_{kl}$, S_{kl}', S_{kl}''.

Из оценки (7) для семиинвариантов следует аналог неравенства С. Н. Бернштейна для $\tilde{Z}_n$ $\left(\text{лемма 8 в [7], в нашем случае } \alpha_n = \frac{1}{u}\right)$, в силу которого имеет место оценка для R_i'

$$R_i' \leqslant \left(\frac{\pi^2}{8t^2} + 2(1+2H_1)\,DS'_{k_i l_i}\right)\exp\left\{-\frac{\pi^2}{32t^2(1+2H_1)\,DS'_{k_i l_i}}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{t^2}\left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{b} + \frac{8}{b^2}\right)\exp\left\{-\frac{\pi b}{8}\right\}, \tag{28}$$

если только

$$|t| \leqslant \frac{1}{4s\,H\,C^{(n)}\,b};$$

b — константа, которую подберем позднее. Используя рассуждения § 6 гл. XVIII в [5] без труда установим соотношение

$$M(\tilde{\tilde{\eta}}_1 - M\tilde{\tilde{\eta}}_1)(\tilde{\tilde{\eta}}_j - M\tilde{\tilde{\eta}}_j) \leqslant \frac{1}{\left(\frac{j}{2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}}\sqrt{D\eta_1^u}, \tag{29}$$

в силу которого, учитывая определение $C^{(n)}$, находим

$$\sum_{i=1}^{N} R_i'' \leqslant \sum_{i=1}^{N} D S''_{k_i l_i} \leqslant c_6 n \left(D \eta_1^u + \sqrt{D \eta_1^u}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{c}_6 n \left(\frac{M |\eta_1^u|^3}{C^{(n)}} + \sqrt{\frac{M |\eta_1^u|^3}{C^{(n)}}}\right) \leqslant C_1 \frac{\sigma_u^2 n}{d}. \tag{30}$$

Как и в [7], l_i подбираем следующим образом. Пусть l_1 — наименьшее из чисел $l \leqslant n$, удовлетворяющих условию $D S'_{k_1 l_1} > \frac{1}{a^2 t^2}$, $0 < a < \frac{b}{2H}$. Числа k_i теперь уже определяются, если вспомнить (22). Тогда $D S'_{k_i l_i}$ удовлетворяет неравенствам (3.16) из [7]:

$$\frac{1}{a^2 t^2} \leqslant D S'_{k_1 l_1} \leqslant \frac{4}{a^2 t^2}. \tag{31}$$

Тем самым, выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} R_i' \leqslant \left\{a^2 \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{b} + \frac{8}{b^2}\right) e^{-\frac{\pi b}{8}} + \right.$$

$$\left. + a^2 \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{8(1+2H_1)}{a^2}\right) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{128(1+2H_1)}}\right\} \sum_{i=1}^{N} D S'_{k_i l_i}. \tag{32}$$

Оценим

$$D M \{\tilde{S}_{k_i l_i} | \mathcal{F}_{k_i} \times \mathcal{F}_{l_i}\} = M M^2 \{\tilde{S}_{k_i l_i} | \mathcal{F}_{k_i} \times \mathcal{F}_{l_i}\}.$$

Будем иметь

$$M M^2 \left\{\sum_{j=k_i}^{l_i} \eta_j^u | \mathcal{F}_{k_i} \times \mathcal{F}_{l_i}\right\} =$$

$$= M \left(\sum_{j=0}^{u} M \{\eta_{k_i+j}^u | F_{k_i}\} + \sum_{j=0}^{u} M \{\eta_{l_i-u+j}^u | \mathcal{F}_{l_i}\}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2M \left(\sum_{j=1}^{u} \{\eta_{k_i+j}^u | \mathcal{F}_{k_i}\}\right)^2 + 2M \left(\sum_{j=0}^{u-1} M \{\eta_{l_i-u+j}^u | \mathcal{F}_{l_i}\}\right)^2.$$

Слагаемые в первой сумме допускают оценку

$$| M (M \{\eta_{k_i+j_1}^u | \mathcal{F}_{k_i}\} \cdot M \{\eta_{k_i+j_2}^u | \mathcal{F}_{k_i}\}) | =$$

$$= \left| M \left\{ M \left\{ M \{ f(T^{k_i+j_1} t) | \varepsilon_{k_i+j_1}, \ldots, \varepsilon_{k_i+j_1+s}\} | \varepsilon_{k_i}, \ldots, \varepsilon_{k_i+u} \right\} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times M \left\{ M \{ f(T^{k_i+j_2} t) | \varepsilon_{k_i+j_2}, \ldots, \varepsilon_{k_i+j_2+u}\} | \varepsilon_{k_i}, \ldots, \varepsilon_{k_i+u} \right\} \right| =$$

$$= \left| M \left(M \{ f(T^{k_i+j_1} t) | \varepsilon_{k_i+j_1}, \ldots, \varepsilon_{k_i+u}\} M \{ f(T^{k_i+j_2} t) | \varepsilon_{k_i+j_2}, \ldots, \varepsilon_{k_i+u}\} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - M \left\{ M \{ f(T^{k_i+j_1} t)\} M \{ f(T^{k_i+j_2} t) | \varepsilon_{k_i+j_2}, \ldots, \varepsilon_{k_i+u}\} \right\} \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_7}{(j_2-j_1)^{\frac{\gamma}{2}}},$$

если положить $j_1 \leqslant j_2$.

Оценим теперь слагаемые второй суммы ($j_1 \leqslant j_2$)

$$\Big| M\Big\{ M\{f(T^{l_i-u+j_1}t) \mid \varepsilon_{l_i-u+j_1}\} \mid \varepsilon_{l_i}, \ldots, \varepsilon_{l_i+u}\Big\} \times$$

$$\times M\{f(T^{l_i-u+j_2}t) \mid \varepsilon_{l_i-u+j_2}\} \mid \varepsilon_{l_i}, \ldots, \varepsilon_{l_i+u}\Big\}\Big| =$$

$$= \Big| M\Big\{ M\{f(T^{l_i-u+j_1}t) \mid \varepsilon_{l_i}, \ldots, \varepsilon_{l_i+j_1}\} \; M\{f(T^{l_i-u+j_2}t) \mid \varepsilon_{l_i}, \ldots, \varepsilon_{l_i+j_2}\}\Big\}\Big| =$$

$$= \Big| M\Big\{\Big(M\{f(T^{l_i-u+j_1}t) - M\{f(T^{l_i-u+j_1}t) \mid \varepsilon_{l_i-u+j_1}, \ldots, \varepsilon_{l_i-1}\}\Big)\Big| \times$$

$$\times \varepsilon_{l_i}, \ldots, \varepsilon_{l_i+j_1}\Big\} \; M\{f(T^{l_i-u+j_2}t) \mid \varepsilon_{l_i}, \ldots, \varepsilon_{l_i+j_2}\}\Big\}\Big| \leqslant c_8 \frac{1}{(j_2-j_1)^{\frac{\gamma}{2}}} .$$

Из полученных оценок следует, если вспомнить ограничения для γ,

$$D\,M\{\tilde{S}_{k_i\,l_i} \mid \mathcal{F}_{k_i} \times \mathcal{F}_{l_i}\} \leqslant c_9. \tag{33}$$

Для величин $\tilde{\eta}_j$ в неравенстве (29) $\sqrt{D\,\eta_1^u}$ следует заменить на $C^{(n)}$, так что, вспомнив определение a, будем иметь

$$\frac{1}{a^2 t^2} \leqslant DS'_{k_1\,l_1} \leqslant C_5\, C^{(n)2}(l_1 - k_1) , \tag{34}$$

что дает

$$l_1 - k_1 \geqslant \frac{u^2 b^2}{c_5\, a^2} . \tag{35}$$

Поэтому, учитывая (22) и (35), будем иметь

$$\sum_{i=1}^{N-1} D\,S_{k_i\,l_i} = \sigma_u^2 n \,\Big(1 + o(1)\Big) .$$

Из последнего неравенства при

$$d > 3\,C_1 \tag{36}$$

следует оценка, верная для всех $n > n_0$,

$$\sum_{i=1}^{N} DS'_{k_i\,l_i} \leqslant 2\sigma_u^2 n . \tag{37}$$

Если

$$128\,a^2 \Big\{\Big(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{b} + \frac{8}{b^2}\Big)\, e^{-\frac{\pi}{8}b} +$$

$$+ \frac{\pi^2}{8} + \frac{1+2H}{a^2}\, e^{-\frac{\pi^2 a^2}{128(1+2H_1)}} + \frac{C_1}{d}\Big\} \leqslant \frac{1}{2} , \tag{38}$$

то из (25), (30), (32) и (37) следует

$$\sum_{i=1}^{N} R_{k_i\,l_i}(t) \leqslant \frac{\sigma_u^2 n}{2} . \tag{39}$$

Нетрудно заметить, что можно подобрать константы a, b, d, удовлетворяющие неравенствам (36), (38) и $0<a<\frac{b}{2H_s}$. Учитывая определение $C^{(n)}$, получаем

$$f_{\tilde{S}_n}(t)\leqslant e^{-\frac{t^2}{3\pi}\sigma_u\sqrt{n}}$$

при

$$|t|\leqslant\frac{\sigma_u^2}{4sH_2bdM|\eta_1|^3}.$$

Лемма доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Воспользуемся разложением (14), положив $s=3$, которое в этом случае имеет место при

$$|t|\leqslant\frac{\rho^{(n)}}{2\sqrt{2H_6}},$$

где

$$\rho^{(n)}=2\sqrt{2}H_6a\sqrt{\log(1+K_{3n}^{-1})}.$$

Формула (11) для этого случая превращается в

$$\frac{DS_n'}{\sigma_u^2n}=1+c_8^{(4)}K_{3n},\tag{40}$$

если положить в (6) и (9) $s=3$.

Таким образом, учитывая (14), (16) и (40), выводим

$$\log f_{Z_n'}(t)=-\frac{t^2}{2}+c_8^{(5)}(|t|+|t|^3)K_{3n},$$

или

$$f_{Z_n'}(t)=\left(1+c_8^{(5)}(|t|+|t|^2+|t|^3)K_{3n}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Обозначив $\tilde{Z}_n=\frac{\tilde{S}_n}{\sigma_u\sqrt{n}}$ и принимая во внимание (19), получаем

$$f_{\tilde{Z}_n}(t)=\left(1+c_8^{(6)}(|t|+|t|^3)K_{3n}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}+c_8|t|K_{3n}.\tag{41}$$

Кроме того, имеет место следующая оценка:

$$|f_{\tilde{Z}_n}(t)-f_{Z_n}(t)|\leqslant A\frac{\sqrt{n}|t|}{u^{\frac{\gamma}{2}}},\tag{42}$$

и, согласно лемме 2,

$$|f_{\tilde{Z}_n}(t)|\leqslant e^{-\frac{t^2}{3\pi^2}}\quad\text{при}\quad|t|\leqslant c_8\frac{\sigma_u^2n}{u}.$$

Применим лемму Эссеена ([10] § 39, теорема 1), положив $T=cK_{3n}^{-1}$, а в (6), (42) $u=n^{\frac{3}{4+\gamma}}$.

Имеем

$$|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{\pi}+c_9K_{3n},\tag{43}$$

где

$$\varepsilon=\int\limits_{-T}^{T}\frac{|f_{Z_n}(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}|}{|t|}\,dt\leqslant I_1+I_2+I_3+I_4,$$

$$I_1=\int\limits_{-\rho(n)}^{\rho(n)}\frac{|f_{\tilde Z_n}(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}|}{|t|}\,dt,\qquad I_2=\int\limits_{|t|>\rho(n)}\frac{|f_{\tilde Z_n}(t)|}{|t|}\,dt,$$

$$I_3=\int\limits_{|t|>\rho(n)}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{|t|}\,dt,\qquad I_4=\int\limits_{-T}^{T}\frac{|f_{\tilde Z_n}(t)-f_{Z_n}(t)|}{|t|}\,dt.$$

Утверждение теоремы следует из оценок (41)–(43).

6. Доказательство теоремы 3. Заметим, что в этом случае

$$M\,|\eta_1-\eta_1^u|^2\leqslant\tilde c_{10}\,2^{-\beta u}=\frac{c_{10}}{n^2}\,, \tag{44}$$

если $u=\frac{2}{\beta}\log n$.

При этом же u соотношение (11) преобразуется в

$$\frac{D\,S_n'}{\sigma_u^2 n}=1+\frac{c_\delta^{(7)}}{\sqrt{n}}\,,$$

что вместе с (16) дает

$$\frac{\Gamma_3\{S_n'\}}{(\sigma_u\sqrt{n})^3}\leqslant\frac{C_\delta^{(7)}}{\sqrt{n}}\,.$$

Тогда из разложения (14), принимая во внимание эти два последних соотношения, выводим

$$f_{Z_n'}(t)=\left(1+\tilde c_\delta\,(|t|^2+|t|^3)\,\rho(n)^{-1+\delta}K_{3+\delta,n}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}\,.$$

Так как в этом случае

$$M\,|\tilde S_n-S_n'|\leqslant\frac{8n\,M\,|\tilde\eta|^{3+\delta}}{C(n)^{2+\delta}}\leqslant c_\delta^{(8)},$$

будем иметь

$$f_{\tilde Z_n}(t)=\left(1+(|t|^2+|t|^3)\,\frac{c_\delta^{(9)}}{\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}+c_\delta^{(10)}\,\frac{|t|}{\sqrt{n}}$$

при

$$|t|\leqslant\frac{\rho(n)}{2\sqrt{2}H}=a\sqrt{\log\left(1+\frac{c_\beta\sqrt{n}}{\log^2 n}\right)}.$$

Кроме того, из леммы 2 следует оценка

$$|f_{\tilde Z_n}(t)|\leqslant e^{-\frac{t^2}{3\pi^2}}$$

при

$$|t| < c'_\beta \frac{\sqrt{n}}{\log n}.$$

Доказательство завершается выкладками, совершенно такими же, как в теореме 2, так как из соотношения (44) следует, что

$$|f_{\tilde{Z}_n}(t) - f_{Z_n}(t)| < c_{11} \frac{|t|}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Автор глубоко признателен проф. Й. Кубилюсу за постоянное внимание к работе и проф. В. Статулявичусу за ценные советы.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 28.V.1971

Литература

1. Й. П. Кубилюс, Предельные теоремы для сумм слабозависимых величин в теории диофантовых приближений, Liet. matem. rink., **V**, 2 (1965), 337–338.
2. А. Г. Постников, Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений, Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 82 (1966).
3. И. А. Ибрагимов, Центральная предельная теорема для сумм функций от независимых величин и сумм вида $\Sigma f(t2^n)$, Теория вероят. и ее примен., **XII**, 4 (1967), 655–665.
4. В. И. Ладохин, Д. А. Москвин, Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме для сумм функций от независимых величин и сумм вида $\Sigma f(t2^n)$, Теория вероят. и ее примен., **XVI**, 1 (1971), 108–117.
5. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965.
6. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова, I, Liet. matem. rink., **IX**, 2 (1969), 345–362.
7. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова, II, Liet. matem. rink., **IX**, 3 (1969), 635–672.
8. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова, III, Liet. matem. rink., **X**, 1 (1970), 162–169.
9. В. А. Статулявичус, Об асимптотическом разложении характеристической функции суммы независимых случайных величин, Предельные теоремы теории вероятностей, Ташкент, 1963, 123–130.
10. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.–Л., 1949.
11. Г. А. Мисявичус, О больших уклонениях сумм $\Sigma f(T^k t)$, Материалы докладов XXI республ. научно-техн. конференции, Математика, Каунас, 1971, 37–45.
12. Г. А. Мисявичус, Асимптотические разложения для функций распределения сумм вида $\Sigma f(T^i t)$, Annales Univ. Sci. Budapest, S. Math., **XIV** (1971), 77–92.
13. Дж. Дуб, Вероятностные процессы, М., 1956.

SUMŲ $\Sigma\varphi(2^k t)$ CHARAKTERINGŲJŲ FUNKCIJŲ ASIMPTOTINIS IŠDĖSTYMAS

G. Misevičius

(*Reziumė*)

Darbe gautas sumų $\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(2^j t)$ pasiskirstymų charakteringųjų funkcijų asimptotinis išdėstymas, kuris panaudojamas centrinės ribinės teoremos liekamųjų narių įvertinimui.

ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE CHARACTERISTIC FUNCTION OF THE SUM $\Sigma\varphi(2^k t)$

G. Misevičius

(*Summary*)

Every number $t \in (0, 1)$ may be represented in the form

$$t = \frac{\varepsilon_1(t)}{2} + \frac{\varepsilon_2(t)}{4} + \dots .$$

Define operation T as follows

$$Tt = \{2t\} = \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_3}{4} + \dots$$

Let $\varphi(t)$ be a Lebesque integrable function defined on (0.1) with $\int_0^1 \varphi(t)\, dt = 0$. Further notations are given by (1*).

The theorem 1 gives an asymptotic expansion (3*) for the characteristic function of the distribution function $F_n(x)$ with respect to "the conditional" Liapunov's fractions (4*) under the conditions I, II, III. The expansion (3*) is true in the interval (2*).

The author has used the expansion (3*) to evaluate the remainder term in the limit theorem for the distribution function $F_n(x)$ (theorems 2, 3).