XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972

УДК 513.7

РЕДУКЦИИ РАССЛОЕНИЯ $G(G/H, H)$ НАД ПОДМНОГООБРАЗИЯМИ ПРОСТРАНСТВА G/H (II)*

Р. В. Восилюс

2. Продолжение расслоений

1. Рассмотрим n-мерное класса C^∞ дифференцируемое многообразие M^n, над которым задано m-мерное тоже класса C^∞, векторное расслоение ξ. Пусть дифференцируемая структура многообразия M^n задается открытым покрытием $\{U_y\}$, для каждой окрестности U_α которого задан гомеоморфизм φ_α на открытую окрестность эвклидова пространства R^n.

Пусть точка $x \in M^n$ лежит в пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ двух координатных окрестностей. Этим окрестностям в пространстве R^n соответствуют открытые множества $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ и $\varphi_\beta(U_\beta)$, обладающие отмеченными точками соответственно $\varphi_\alpha(x)$ и $\varphi_\beta(x)$. Пусть $r_\alpha(x)$ $\big($соответственно $r_\beta(x)\big)$ такая трансляция пространства R^n, которая переводит точку $\varphi_\alpha(x)$ $\big($соответственно $\varphi_\beta(x)\big)$ в нулевую точку. Это для каждой точки

$$x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

позволяет строить окрестности

$$U_\alpha(x) = r_\alpha(x)\left(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)\right),$$

$$U_\beta(x) = r_\beta(x)\left(\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)\right)$$

нуля пространства R^n.

Формулой

$$f_{\alpha\beta}(x) = r_\beta(x) \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ r_\alpha^{-1}(x) \qquad (1)$$

зададим диффеоморфизм

$$f_{\alpha\beta}(x) : U_\alpha(x) \to U_\beta(x)$$

с неподвижной нулевой точкой.

В дальнейшем буквой ξ обозначим как само векторное расслоение, так и векторное пространство, являющееся „типовым слоем" расслоения ξ. Слой над точкой $x \in M^n$ обозначим через ξ_x.

---

* Список литературы, резюме на литовском и английском языках приложены к первой части настоящей статьи, помещенной в „Литовском математическом сборнике", 1972, XII, № 1.

Структура векторного расслоения ξ задается отображениями

$$\bar{\varphi}_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL(\xi),$$

которые над пересечениями

$$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

удовлетворяют условию

$$\bar{\varphi}_{\gamma\alpha}(\cdot) = \left(\bar{\varphi}_{\gamma\beta}(\cdot)\right)\left(\bar{\varphi}_{\beta\alpha}(\cdot)\right).$$

Формулой

$$\varphi_{\beta\alpha}(x) = \bar{\varphi}_{\beta\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ r_\alpha(x)^{-1} \tag{2}$$

зададим отображение

$$\varphi_{\beta\alpha}(x): U_\alpha(x) \to GL(\xi).$$

Тогда пара

$$\left(j_0^k f_{\alpha\beta}(x),\ j_0^k \varphi_{\beta\alpha}(x)\right)$$

каждой точке $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ сопоставит элемент $a_{\beta\alpha}^k(x)$ группы $GL^k(R^n, \xi)$, что даст отображение

$$a_{\beta\alpha}^k: U_\alpha \cap U_\beta \to GL^k(R^n, \xi). \tag{3}$$

Теорема 1.2. *Над пересечением* $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ *выполняется соотношение*

$$a_{\gamma\alpha}^k(\cdot) = \left(a_{\gamma\beta}^k(\cdot)\right)\left(a_{\beta\alpha}^k(\cdot)\right). \tag{4}$$

Доказательство. Известно, что

$$a_{\gamma\alpha}^k(\cdot) = \left(j_0^k f_{\alpha\gamma}(\cdot),\ j_0^k \varphi_{\gamma\alpha}(\cdot)\right).$$

Следовательно, соотношение (4) будет доказано, если проверить равенства

$$f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\gamma},$$

$$\varphi_{\gamma\alpha}(\cdot) = \left((\varphi_{\gamma\beta} \circ f_{\alpha\beta})(\cdot)\right)\left(\varphi_{\beta\alpha}(\cdot)\right).$$

Однако для такой проверки достаточно лишь воспользоваться определением отображений $f_{\alpha\beta}$ и $\varphi_{\alpha\beta}$.

Например, в случае второго равенства имеем:

$$\left((\varphi_{\gamma\beta} \circ f_{\alpha\beta})(\cdot)\right)\left(\varphi_{\beta\alpha}(\cdot)\right) = \left(\bar{\varphi}_{\gamma\beta} \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ r_\alpha^{-1}(\cdot)\right)\left(\bar{\varphi}_{\beta\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ r_\alpha^{-1}(\cdot)\right) =$$

$$= \bar{\varphi}_{\gamma\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ r_\alpha^{-1}(\cdot) = \varphi_{\gamma\alpha}(\cdot).$$

Теорема доказана.

В дальнейшем группу $GL^k(R^n, \xi)$ обозначим через $GL^k(n, \xi)$.

Следствие 1. *Для каждого целого числа* $k \geqslant 0$ *над многообразием* M^n *определено главное расслоение с группой* $GL^k(n, \xi)$.

Эти расслоения обозначим через $B^k(M^n, \xi)$.

Пространство $D^k(R^n, \xi)$ обозначим через $D^k(n, \xi)$.

Следствие 2. *В силу того, что группа* $GL^k(n, \xi)$ *посредством представления* ρ^k *левосторонним образом действует в пространстве* $D^k(n, \xi)$, *для каждого целого числа $k \geqslant 0$ над базой M^n определено векторное расслоение ξ^k, типовым слоем которого это пространство является. При этом очевидно, что*

$$\xi^0 = \xi.$$

Теорема 2.2. *Расслоение ξ^k изоморфно k-му джет-продолжению расслоения ξ.*

Доказательство. Пусть

$$\pi : \xi \to M^n$$

является канонической проекцией расслоения ξ. Для каждой координатной окрестности U_α многообразия M^n определен изоморфизм

$$\omega_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \xi.$$

При помощи этого изоморфизма каждая секущая поверхность

$$\sigma : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

индуцирует отображение

$$\psi_\alpha : U_\alpha \to \xi,$$

k-я струя которого задает секущую поверхность

$$j^k \psi_\alpha : U_\alpha \to D^k(n, \xi)$$

расслоения ξ^k.

С другой стороны, джет-продолжение секущей поверхности σ определяет секущую поверхность расслоения $J^k(\xi)$. Легко видеть, что соответствие таких поверхностей не зависит от выбранной тривиализации и определяет послойный изоморфизм. Это и доказывает теорему.

В пространстве $D^k(n, \xi)$ мы построили флаг подпространств

$$T^k(n, \xi) : T_0^k(n, \xi) \subset T_1^k(n, \xi) \subset \ldots \subset T_k^k(n, \xi) = D^k(n, \xi).$$

В силу теоремы (1.4) этот флаг инвариантен относительно группы $GL^k(n, \xi)$. Значит, расслоение ξ^k обладает последовательностью вложенных друг в друга подрасслоений

$$\xi_0^k \subset \xi_1^k \subset \xi_2^k \subset \ldots \subset \xi_k^k = \xi^k.$$

Тем самым, каждый слой расслоения ξ обладает соответствующим флагом подпространств.

2. Вернемся к дифференцируемой структуре многообразия M^n. Известно, что каждой точке $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ соответствует диффеоморфизм

$$f_{\alpha\beta}(x) : U_\alpha(x) \to U_\beta(x).$$

Следовательно, пара

$$\psi_{\beta\alpha}(x) = \left(j_0^k f_{\alpha\beta}(x),\ j_0^k \, df_{\alpha\beta}(x)\right)$$

представляет элемент группы $DL^{k+1}(n)$. Это порождает отображение

$$\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to DL^{k+1}(n),$$

которое, как легко видеть, удовлетворяет условию (4).

Следствие 3. *Для каждого целого числа $k \geqslant 0$ можно говорить о главных расслоениях над базой M^n с группой расслоения $DL^{k+1}(n)$.* Эти расслоения обозначим через $B^k(M^n)$.

Как видно $\big($теорема (1.6)$\big)$, группа $DL^{k+1}(n)$ является подгруппой группы $GL^k(n)$. Следовательно, она левосторонним образом действует в пространстве $D^k(n)$.

Следствие 4. *Для каждого целого числа $k \geqslant 0$ над многообразием M^n определено векторное расслоение $T^k(M^n)$ с типовым слоем $D^k(n)$.*

Расслоение $T^0(M^n)$ является касательным расслоением многообразия M^n, тогда как расслоения $T^k(M^n)$ — его k-м джет-продолжением.

Для каждого расслоения $T^k(M^n)$ определена последовательность

$$T_0^k(M^n) \subset T_1^k(M^n) \subset \ldots \subset T_k^k(M^n) = T^k(M^n)$$

подрасслоений, задающая флаг подпространств в каждом его слое.

В силу теоремы (1.5), расслоение $T_0^k(M^n)$ изоморфно расслоению тензоров типа T_1^k.

3. Пусть

$$r^k \in B^k(M^n, \xi), \quad v \in D^k(n, \xi).$$

Согласно определению присоединенного расслоения, элементом пространства ξ^k является класс эквивалентности пары (r^k, v) относительно такого действия группы $DL^{k+1}(n)$, которое эту пару при помощи элемента $a \in DL^{k+1}(n$ переводит в пару

$$\left(r^k a, \ \rho^k(a^{-1}) v\right).$$

Здесь $r^k a$ задается правым действием группы $DL^{k+1}(n)$ в главном расслоении $B^k(M^n, \xi)$.

Через

$$\pi^k : B^k(M^n, \xi) \to M^n$$

обозначим каноническую проекцию этого расслоения. Если π^k рассматривать как отображение пространства $B^k(M^n, \xi)$ в базу расслоения ξ^k, то можно говорить о „поднятии расслоения ξ^k“:

$$(\xi^k)^* = (\pi^k)^* \xi^k.$$

Часто употребляемую конструкцию „продолжения форм над многообразием“ покрывает следующая хорошо известная теорема.

Теорема 3.2. *Расслоение $(\xi^k)^*$ обладает каноническим гауссовым отображением*

$$\omega^k : (\xi^k)^* \to D^k(n, \xi).$$

Доказательство. По определению поднятия векторного расслоения элементами $(\xi^k)^*$ являются пары

$$(R^k \in B^k(M^n, \xi)_x, \ v^k \in \xi_x^k).$$

В свою очередь, элемент v^k задается фактор-классом пары (r^k, v). Это определяет единственный элемент a группы $DL^{k+1}(n, \xi)$ такой, что

$$R^k = r^k a.$$

В пространстве $D^k(n, \xi)$ определим вектор w, полагая

$$w = \rho^k(a^{-1})(v).$$

Легко проверить, что это отображение корректно и является изоморфизмом на каждом слое.

Теорема говорит о том, что каждая точка расслоения $B^k(M^n, \xi)$ задает изоморфизм между слоем расслоения ξ^k, взятым в той же точке, и пространством $D^k(n)$. Это позволяет расслоение $B^k(n, \xi)$ называть „расслоением реперов k-го порядка".

Если

$$r^k \in B^k(n, \xi)_x, \quad v^k \in \xi^k_x,$$

то

$$\omega^k(r^k, v^k)$$

задает „координаты" вектора v^k относительно „подвижного репера" r^k.

3. Порядок изотропии однородного пространства

1. Однородное пространство – это дифференцируемое многообразие M^n, в котором эффективно левосторонним образом действует транзитивная группа преобразований G. Обычно рассматриваются однородные пространства с отмеченной точкой o. Тогда естественным образом возникает замкнутая подгруппа $H \subset G$ – стационарная подгруппа этой точки.

Рассмотрим связные однородные пространства вида G/H.

Теорема 1.3. *Для каждого $k \geqslant 0$ стационарная подгруппа H левосторонним образом представлена в пространстве $B^k(M^n)$ o.*

Доказательство. Пусть U_α – некоторая координатная окрестность, содержащая точку o. Тогда расслоение

$$B^k(M^n)|_{U_\alpha}$$

тривиально. Соответствующая тривиализация позволяет каждую точку

$$r^k \in B^k(M^n)_o$$

представить в виде пары

$$\left(\pi^k r^k, \ (j^k_0 f, \ j^k_0 df)\right),$$

где

$$\pi^k : B^k(M^n) \to M^n$$

каноническое отображение этого расслоения и

$$f: U \to V$$

некоторый диффеоморфизм окрестностей нуля пространства R^n. Этот диффеоморфизм можно задавать в виде отображения

$$f: U \to U_\alpha(o),$$

где, как и раньше,

$$U_\alpha(o) = r(o)\,\varphi_\alpha(U_\alpha).$$

Если U_β — некоторая другая координатная окрестность, содержащая точку o, то r^k относительно этой окрестности представляется в виде пары

$$\left(\pi^k r^k,\ \left(j_0^k (f_{\alpha\beta} \circ f),\ j_0^k d (f_{\alpha\beta} \circ f)\right)\right).$$

Сейчас точке

$$r^k \in B^k (M^n)_o,$$

относительно окрестности U_α, задаваемой в виде пары

$$\left(\pi^k r^k,\ (j_0^k f,\ j_0^k df)\right),$$

сопоставим в соответствие диффеоморфизм

$$\varphi_\alpha^{-1} \circ r_\alpha^{-1} (o) \circ f \colon U \to M^n,$$

который нулевую точку пространства R^n отобразит в точку o. Так как

$$\varphi_\beta^{-1} \circ r_\beta^{-1} (o) \circ f_{\alpha\beta} \circ f = \varphi_\alpha^{-1} \circ r_\alpha^{-1} (o) \circ f,$$

то этот диффеоморфизм не зависит от выбора координатной окрестности точки o.

Формально напишем равенство вида

$$r^k = (j_0^k r,\ j_0^k dr),$$

где

$$r \colon U \to M^n,$$

некоторый диффеоморфизм, такой, что

$$r(0) = o.$$

Пусть $h \in H$ — произвольный элемент этой подгруппы. Сейчас очевидно, что, сопоставляя репер, задаваемый при помощи диффеоморфизма

$$r \colon U \to M^n,$$

и репер, задаваемый диффеоморфизмом

$$h \circ r \colon U \to M^n,$$

мы и получим требуемое представление.

Это представление обозначим через τ^k.

Теорема 2.3. (см. [6]). $\operatorname{Ker} \tau^k$ *тривиально, если только* k *достаточно большое число.*

Доказательство. Если $\operatorname{Ker} \tau^l$ тривиально, то теорема доказана. Пусть

$$h \in \operatorname{Ker} \tau^l$$

— некоторый элемент, отличный от единицы. Тогда

$$(j_0^l r,\ j_0^l dr) = \left(j_0^l (h \circ r),\ j_0^l d (h \circ r)\right)$$

для любого диффеоморфизма

$$r \colon U \to M^n,$$

такого, что

$$r(0) = o.$$

При фиксированной системе координат точки o это значит, что

$$(j_0^l h,\ j_0^l dh)$$

является единицей группы $DL^{l+1}(n)$. Следовательно,

$$j_0^l h = j_0^l 1.$$

Однако, в силу эффективности действия группы G, h не является тождественным преобразованием, и можно найти такое достаточно большое число s, для которого выполнялось бы неравенство

$$j_0^s h \neq j_0^s 1,$$

показывающее, что

$$(j_0^s h,\ j_0^s dh)$$

не является единицей группы $DL^{s+1}(n)$. Тем самым,

$$\left(j_0^s(h \circ r),\ j_0^s d(h \circ r)\right) \neq (j_0^s r,\ j^s dr)$$

и

$$h \bar{\in} \operatorname{Ker} \tau^s.$$

Если $\operatorname{Ker} \tau^s$ является тривиальной подгруппой группы $\operatorname{Ker} \tau^l$ – теорема доказана. Если это не так, то повторим еще раз процедуру исключения элемента группы $\operatorname{Ker} \tau^l$, на этот раз выбирая элемент h_1 достаточно близким к единице группы. Пусть t – наибольшее среди чисел s и s_1. Тогда

$$\dim \operatorname{Ker} \tau^t < \dim \operatorname{Ker} \tau^l.$$

Так как число $\dim \operatorname{Ker} \tau^l$ конечно, теорема доказана.

Через p обозначим наименьшее число, о котором говорится в доказанной теореме.

Теорема 3.3. *Число p не зависит от выбора точки x пространства G/H.*

Доказательство. Пусть $x \in G/H$ – произвольная точка этого пространства. Выберем элемент $g \in G$ такой, что

$$x = g(o).$$

Пусть стационарная подгруппа точки x содержит элемент γ, который при любом выборе диффеоморфизма

$$r : U \to G/H,$$

подчиненного условию

$$r(0) = x,$$

удовлетворяет равенству

$$\left(j_0^p(\gamma \circ r),\ j_0^p d(\gamma \circ r)\right) = (j_0^p r,\ j_0^p dr).$$

Сдвигом g^{-1} репер

$$r_x^p = (j_0^p r,\ j_0^p dr)$$

перенесем в точку o. В этой точке мы получим репер

$$r_o^p = \left(j_0^p(g^{-1} \circ r),\ j_0^p d(g^{-1} \circ r)\right).$$

Преобразование пространства G/H, задаваемое элементом

$$h=g^{-1}\gamma g$$

группы G, не двигает точку o. Значит, $h\in H$. Однако

$$\tau^p(h)r^p_o=\left(j^p_0(h\circ g^{-1}\circ r),\ j^p_0 d(h\circ g^{-1}\circ r)\right)=$$

$$=\left(j^p_0\left(g^{-1}\circ(\gamma\circ r)\right),\ j^p_0 d\left(g^{-1}\circ(\gamma\circ r)\right)\right)=r^p_o,$$

и, в силу произвольности репера r^p_o, h – единица группы G. Тогда γ – тоже единица этой группы, что и доказывает теорему.

Определение. *Число p называется порядком изотропии однородного пространства.*

2. Теперь пространство $B^p(M^n)_o$ разобьем на классы интранзитивности относительно индуцированного в нем действия τ^p стационарной подгруппы H. Некоторый фиксированный такой класс обозначим через $B^p_0(M^n)_o$.

Пусть $x\in M^n$ – любая точка этого пространства. Выберем произвольный элемент $g\in G$, который отмеченную точку o сдвигом пространства G/H переводит в точку x. Каждому реперу

$$r^p_o\in B^p_0(M^n)_o$$

в точке x соответствует „сдвинутый" репер, который обозначим через $g^p r^p_0$.

Теорема 4.3. *Класс интранзитивности репера $g^p r^p_o$ в пространстве $B^p(M^n)_x$ не зависит от выборов преобразования g и репера r^p_o.*

Доказательство. Выберем два репера, принадлежащих классу $B^p_0(M^n)_o$. Они определяют единственный элемент $h\in H$ такой, что

$$\bar r^p_o=\tau^p(h)r^p_o.$$

Тогда

$$\gamma=ghg^{-1}$$

является элементом стационарной подгруппы точки x. Поэтому

$$g^p\bar r^p_o=\left(j^p_0(g\circ h\circ r),\ j^p_0 d(g\circ h\circ r)\right)=$$

$$=\left(j^p_0(\gamma\circ g\circ r),\ j^p_0 d(\gamma\circ g\circ r)\right)=\tau^p(\gamma)(g^p r^p_o),$$

что и доказывает второе утверждение теоремы.

Теперь произвольно выберем два таких элемента g_1, $g_2\in G$, для которых

$$g_1(o)=g_2(o)=x.$$

Соотношением

$$g_1=g_2 h$$

определяется единственный элемент подгруппы H, позволяющий написать равенство

$$g^p_1 r^p_o=g^p_2\left(\tau^p(h)r^p_o\right),$$

которое показывает справедливость и первого утверждения теоремы. Таким образом, фиксированному классу интранзитивности B^p_0 $(M^n)_o$ соответствует „поле" таких классов. Принадлежащее этому полю множество реперов обозначим через $B^p_0(M^n)$.

Каждому фиксированному реперу

$$\overset{\circ}{r}{}^p_o \in B^p_0(M^n)_o$$

можно сопоставить правостороннее действие группы H в множестве $B^p_0(M^n)$. Это действие задается следующим образом. При произвольно заданном репере r^p_x существует единственное преобразование $g \in G$, которое отображением g^p переводит его в репер $\overset{\circ}{r}{}^p_o$. Сопоставляя с элементом $h \in H$ репер

$$\sigma^p_x(h)\, r^p_x = g^p\left(\tau^p(h^{-1})\, \overset{\circ}{r}{}^p_o\right),$$

и получаем требуемое действие.

Теорема 5.3. *$B^p_0(M^n)$ является главным H-расслоением.*

Доказательство. То, что группа H свободно действует в каждом слое, прямо следует из самого определения этого слоя и числа p.

Над каждой координатной окрестностью U_α многообразия M^n расслоение $G(G/H, H)$ тривиально. Это позволяет строить гладкие отображения

$$S: U_\alpha \to H.$$

Если

$$r^p_o \in B^p_0(M^n)_o,$$

то

$$\left(S(\cdot)\right)^p r^p_o : U_\alpha \to B^p_0(M^n)$$

является секущей поверхностью в $B^p_0(M^n)$. Это $B^p_0(M^n)$ превращает в дифференцируемое многообразие и определяет в нем структуру главного H-расслоения.

Следствие. *Расслоения*

$$B^p_0(M^n) \text{ и } G(G/H, H)$$

изоморфны.

Определение. *Расслоение $B^p_0(M^n)$ будем называть геометрической реализацией расслоения $G(G/H, H)$.*

Теорема 6.3. *Каждый сдвиг пространства G/H порождает изоморфизм*

$$B^p_0(M^n) \to B^p_0(M^n)$$

главных расслоений.

Доказательство. Достаточно доказать, что индуцированное сдвигом отображение перестановочно с действием группы H, т.е. доказать справедливость равенства

$$\sigma^p_{\gamma x}(h)\,(\gamma^p r^p_x) = \gamma^p\left(\sigma^p_x(h)\, r^p_x\right)$$

относительно произвольно выбранного элемента γ группы G.

Пусть фиксированный репер слоя $B^p_0(M^n)_o$ задан в виде пары

$$\overset{\circ}{r}{}^p_o = (j^p_0 \overset{\circ}{r},\ j^p d\overset{\circ}{r}),$$

где

$$\overset{\circ}{r}: U \to M^n$$

диффеоморфизм, удовлетворяющий условию

$$\overset{\circ}{r}(0) = o.$$

Для произвольного репера r^p_x фиксируем такой элемент $g \in G$, что

$$r^p_x = g^p \overset{\circ}{r}{}^p_o.$$

Тогда

$$\sigma^p_{\gamma x}(h)(\gamma^p r^p_x) =$$

$$= \sigma^p_{\gamma x}(h)\left(j^p_0(\gamma \circ g \circ \overset{\circ}{r}),\ j^p_0 d(\gamma \circ g \circ \overset{\circ}{r}\right) =$$

$$= \left(j^p_0(\gamma \circ g \circ h^{-1} \circ \overset{\circ}{r}),\ j^p_0 d(\gamma \circ g \circ h^{-1} \circ \overset{\circ}{r})\right).$$

С другой стороны,

$$\gamma^p(\sigma^p_x(h) r^p_x) =$$

$$= \gamma^p\left(j^p_0(g \circ h^{-1} \circ \overset{\circ}{r}),\ j^p_0 d(g \circ h^{-1} \circ \overset{\circ}{r})\right) =$$

$$= \left(j^p_0(\gamma \circ g \circ h^{-1} \circ \overset{\circ}{r}),\ j^p_0 d(\gamma \circ g \circ h^{-1} \circ \overset{\circ}{\ })\right),$$

что и доказывает теорему.

Вильнюсский государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
15.III.1971