1972

УДК 511.3

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Й. Кубилюс, А. Лауринчикас

Пусть $g(m)$ – вещественная мультипликативная функция. Через $N(\ldots)$ обозначим число целых положительных m, удовлетворяющих условиям, которые будут указываться в скобках. Известно [1], что для некоторого класса мультипликативных функций

$$\frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ g(m) < A_n |x|^{\frac{1}{B_n}} \operatorname{sgn} x\right) \tag{1}$$

при надлежащим образом подобранных константах A_n и B_n и при $n \to \infty$ сходится к некоторой функции распределения $F(x)$ во всех ее точках непрерывности, а также в нуле $\left(\text{если там имеется разрыв } F(x)\right)$. В работе [2] исследовалась быстрота сходимости (1) к предельному закону для некоторого класса мультипликативных функций. Цель настоящей работы – показать, что путем введения дополнительных ограничений можно получить теоремы о больших уклонениях крамеровского типа.

Рассмотрим класс вещественных мультипликативных функций $g(m)$, обладающих следующими свойствами: существуют такие константы $\lambda \neq 0$, $\delta > 0$, c, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, что

$$\begin{gathered}
\sum_{g(p)=0} \frac{\ln p}{p} \leqslant c_1, \qquad \sum_{\substack{g(p)<0 \\ a_p<c}} \frac{\ln p}{p} \leqslant c_3, \\
\sum_{\substack{g(p)>0 \\ a_p<c}} \frac{a_p \ln p}{p} \leqslant c_3, \qquad \sum_{\substack{g(p)\neq 0 \\ a_p \geqslant c}} \frac{e^{\delta a_p} \ln p}{p} \leqslant c_4, \\
\sum_{p} \sum_{\substack{\alpha=2 \\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{\delta |\ln |g(p^\alpha)||}}{p^\alpha} \leqslant c_5,
\end{gathered} \tag{A}$$

где $a_p = |\ln |g(p)| - \lambda|$ и суммы берутся по простым числам p, удовлетворяющим соответствующим условиям.

Обозначим $c_6, \ldots, c_{18}$ константы, зависящие только от λ, c, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, а B – множитель, ограниченный по модулю константой.

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Если вещественная мультипликативная функция* $g(m)$ *удовлетворяет условиям* (A), $n\to\infty$ *и* $x=o(\sqrt{\ln\ln n})$, *то для чисел*

$$N\left(m\leqslant n,\ 0<g(m)<\exp(\lambda\ln\ln n+x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n})\right)\qquad \text{при } x\leqslant 0,$$

$$N\left(m\leqslant n,\ g(m)>\exp(\lambda\ln\ln n+x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n})\right)\qquad \text{при } x\geqslant 0$$

имеет место асимптотическая формула

$$n\beta_0\Phi(-|x|)e^{Q_n(x)}\left(1+\frac{B(|x|+1)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right),$$

а для чисел

$$N\left(m\leqslant n,\ -\exp(\lambda\ln\ln n+x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n})<g(m)<0\right)\qquad \text{при } x\leqslant 0,$$

$$N\left(m\leqslant n,\ g(m)<-\exp(\lambda\ln\ln n+x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n})\right)\qquad \text{при } x\geqslant 0$$

справедлива формула

$$n\beta_1\Phi(-|x|)e^{Q_n(x)}\left(1+\frac{B(|x|+1)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right),$$

причем

$$\beta_k=\frac{\omega_0+(-1)^k\omega_1}{2},\quad \omega_k=\prod_p\sum_{\substack{\alpha=0\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\quad (k=0,1),$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

$$Q_n(x)=\frac{x^2}{2}+\left(\xi-(1+\xi)\ln(1+\xi)\right)\ln\ln n,$$

$$\xi=\frac{x\operatorname{sgn}\lambda}{\sqrt{\ln\ln n}}.$$

Доказательство. Для удобства будем считать, что n — целое положительное число. Для комплексных z положим

$$w_{kn}(z)=\frac{1}{n}\sum_{\substack{m=1\\ g(m)\neq 0}}^{n}|g(m)|^z\operatorname{sgn}^k g(m)\qquad (k=0,\ 1).\tag{2}$$

Оценим эти функции с помощью леммы 2 работы [3]. Для этого покажем, что функция $|g(m)|^z\operatorname{sgn}^k g(m)$ при $|z|\leqslant\delta/2$ удовлетворяет условиям этой леммы. Заметим, что для любых комплексных v справедливо неравенство

$$|e^v-1|\leqslant|v|e^{|v|}.\tag{3}$$

В силу условий (A) (при $g(m)=0$ считаем $|g(m)|^z\operatorname{sgn}^k g(m)=0$; аналогичное соглашение имеем в виду и в дальнейшем) получаем

$$\sum_p\left|\,|g(p)|^z\operatorname{sgn}^k g(p)-e^{\lambda z}\right|\frac{\ln p}{p}\leqslant e^{\frac{\delta|\lambda|}{2}}\Bigg(\sum_{g(p)=0}\frac{\ln p}{p}+\frac{1}{2}\delta e^{\frac{c\delta}{2}}\times$$

$$\times\sum_{\substack{g(p)>0\\ a_p<c}}\frac{a_p\ln p}{p}+2e^{\frac{c\delta}{2}}\sum_{\substack{g(p)<0\\ a_p<c}}\frac{\ln p}{p}+2\sum_{\substack{g(p)\neq 0\\ a_p\geqslant c}}e^{\frac{\delta a_p}{2}}\frac{\ln p}{p}\Bigg)\leqslant$$

$$\leqslant e^{\frac{\delta|\lambda|}{2}}\left(c_1+\frac{1}{2}c_3\delta e^{\frac{c\delta}{2}}+2c_2e^{\frac{c\delta}{2}}+2c_4\right)\tag{4}$$

и

$$\sum_p \sum_{\alpha=2}^{\infty} \left| |g(p^\alpha)|^z \right| \frac{\ln p^\alpha}{p^\alpha} \leqslant \Bigl(\sum_p \sum_{\substack{\alpha=2\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{\delta |\ln |g(p^\alpha)||}}{p^\alpha} \Bigr)^{\frac{1}{2}} \Bigl(\sum_p \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{\ln^2 p^\alpha}{p^\alpha} \Bigr)^{\frac{1}{2}} \leqslant c_6. \quad (5)$$

Из упомянутой леммы при $|z| \leqslant \delta/2$ и достаточно большом n получаем оценку

$$w_{kn}(z) = \frac{(\ln n)^{e^{\lambda z}-1} h_k(z)}{\Gamma(e^{\lambda z})} + BR(\ln n)^{\frac{1}{2}e^{\lambda \operatorname{Re} z}-1}, \quad (6)$$

где Γ означает гамма-функцию,

$$h_k(z) = \prod_p \psi_{pk}(z),$$

$$\psi_{pk}(z) = \Bigl(1 - \frac{1}{p}\Bigr)^{e^{\lambda z}} \Bigl(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|g(p^\alpha)|^z \operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\Bigr).$$

Величина R определяется следующим образом:

$$R = \begin{cases} (1 - e^{\lambda \operatorname{Re} z})^{-\frac{1}{2}} & \text{при } e^{\lambda \operatorname{Re} z} < 1 - (\ln\ln n)^{-1}, \\ (\ln\ln n)^{\frac{1}{2}} & \text{при } |e^{\lambda \operatorname{Re} z} - 1| \leqslant (\ln\ln n)^{-1}, \\ (e^{\lambda \operatorname{Re} z} - 1)^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^{\frac{1}{2}(e^{\lambda \operatorname{Re} z}-1)} & \text{при } e^{\lambda \operatorname{Re} z} > 1 + (\ln\ln n)^{-1}. \end{cases}$$

Согласно (4) и (5) существует такое p_0, что при $p > p_0$ для $|z| \leqslant \delta/2$

$$\Bigl| \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{|g(p^\alpha)|^z \operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha} \Bigr| \leqslant \frac{1}{6},$$

$$\Bigl| \frac{|g(p)|^z \operatorname{sgn}^k g(p) - e^{\lambda z}}{p} \Bigr| \leqslant \frac{1}{6},$$

$$e^{\lambda \operatorname{Re} z} \leqslant \frac{1}{6} p.$$

Для таких p и z имеем $\psi_{pk}(z) \neq 0$. Используя неравенства

$$|\ln(1+v)| \leqslant 2|v|, \quad |\ln(1+v) - v| \leqslant |v|^2,$$

справедливые для комплексных v, $|v| \leqslant \frac{1}{2}$, получаем

$$\Bigl| \sum_{p>p_0} \ln \psi_{pk}(z) \Bigr| = \Bigl| \sum_{p>p_0} \Bigl\{ e^{\lambda z} \Bigl[\ln\Bigl(1 - \frac{1}{p}\Bigr) + \frac{1}{p} \Bigr] + \Bigl[\ln\Bigl(1 + \frac{e^{\lambda z}}{p}\Bigr) - \frac{e^{\lambda z}}{p} \Bigr] + \ln\Bigl[1 + \Bigl(1 + \frac{e^{\lambda z}}{p}\Bigr)^{-1} \Bigl(\frac{|g(p)|^z \operatorname{sgn}^k g(p) - e^{\lambda z}}{p} + \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{|g(p^\alpha)|^z \operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha} \Bigr) \Bigr] \Bigr\} \Bigr| \leqslant \sum_{p>p_0} \Bigl(\frac{e^{\frac{\delta|\lambda|}{2}}}{p^2} + \frac{e^{\delta|\lambda|}}{p^2} + \frac{12 e^{\frac{\delta|\lambda|}{2}}}{5p} \times$$

$$\times \Bigl| |g(p)|^z e^{-\lambda z} \operatorname{sgn}^k g(p) - 1 \Bigr| + \frac{12}{5} \sum_{\substack{\alpha=2\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty} \frac{|g(p^\alpha)|^{\operatorname{Re} z}}{p^\alpha} \Bigr) \leqslant$$

$$\leqslant\left(e^{\frac{\delta|\lambda|}{2}}+e^{\delta|\lambda|}\right)\sum_{p>p_0}\frac{1}{p^2}+\frac{12}{5}e^{\frac{\delta|\lambda|}{2}}\left(\sum_{g(p)=0}\frac{1}{p}+\right.$$

$$+\frac{\delta}{2}e^{\frac{c\delta}{2}}\sum_{\substack{g(p)>0\\ a_p<c}}\frac{a_p}{p}+2e^{\frac{c\delta}{2}}\sum_{\substack{g(p)<0\\ a_p<c}}\frac{1}{p}+$$

$$\left.+2\sum_{\substack{g(p)\neq 0\\ a_p\geqslant c}}\frac{e^{\frac{\delta a_p}{2}}}{p}\right)+\frac{12}{5}\sum_{p>p_0}\sum_{\substack{\alpha=2\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{2}\delta|\ln|g(p^\alpha)||}}{p^\alpha}.$$

Отсюда и из условий (A) заключаем, что $h_k(z)$ является регулярной при $|z|\leqslant$ $\leqslant c_7$, где c_7 — достаточно малая постоянная, причем

$$h_k(z)=B. \tag{7}$$

С помощью контурного интегрирования из (7) следует, что при $|z|\leqslant c_8<c_7$

$$h_k(z)=\omega_k+B|z|,$$

где

$$\omega_k=h_k(0)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right),$$

причем $\operatorname{sgn}^k 0=0$. Заметим, что $0\leqslant\omega_1\leqslant\omega_0\leqslant 1$, $\omega_0>0$. Кроме того, $\omega_0=\omega_1$ тогда и только тогда, когда $g(p^\alpha)\geqslant 0$ для всех p^α. Следовательно, при $|z|\leqslant$ $\leqslant c_9\leqslant c_8$, где c_9 — достаточно мало,

$$|h_0(z)+h_1(z)|\geqslant c_{10}>0 \tag{8}$$

и

$$|h_0(z)-h_1(z)|\geqslant c_{11}>0; \tag{9}$$

второе неравенство имеет место в том случае, когда $g(p^\alpha)$ принимает хотя бы одно отрицательное значение. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении случая $k=1$ всегда будем предполагать, что это условие выполнено.

Из сказанного выше получаем, что при $|z|\leqslant c_9$

$$S_{nk}(z)=\frac{1}{2}\left(w_{n0}(z)+(-1)^k w_{n1}(z)\right)=e^{H_{nk}(z)}\left(1+B(\ln n)^{-\frac{1}{3}}\right), \tag{10}$$

если только c_9 достаточно мало. Здесь положено

$$H_{nk}(z)=(e^{\lambda z}-1)\ln\ln n+\varphi_k(z),$$

$$\varphi_k(z)=\ln\frac{h_0(z)+(-1)^k h_1(z)}{2}-\ln\Gamma(e^{\lambda z}).$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства $S_{nk}(z)$. В силу (7), (8), (9), (10) и известных свойств гамма-функции получаем при

$$|z|\leqslant\frac{1}{4}c_9,\quad |\zeta|\leqslant\frac{1}{4}c_9$$

$$\ln S_{nk}(z+\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(\frac{1}{v-z}+\frac{\zeta}{(v-z)^2}+\frac{\zeta^2}{(v-z)^3}+\frac{\zeta^3}{(v-z)^3(v-z-\zeta)}\right)\times$$

$$\times\ln S_{nk}(v)\,dv=\ln S_{nk}(z)+\zeta H'_{nk}(z)+\frac{1}{2}\zeta^2 H''_{nk}(z)+B|\zeta|(\ln n)^{-\frac{1}{3}}+$$

$$+B|\zeta|^3\ln\ln n. \tag{11}$$

Здесь L означает окружность $|v-z-\zeta|=\frac{1}{2}c_9$. Из (7), (8), (9) с помощью контурного интегрирования выводим также, что при $|z|\leqslant\frac{1}{4}c_9$

$$\varphi_k(z)-\varphi_k(0)-z\varphi_k'(z)=B|z|^2, \tag{12}$$

$$\varphi_k'(z)-\varphi_k'(0)-z\varphi_k''(0)=B|z|^2, \tag{13}$$

$$\varphi_k^{(j)}(z)=B \qquad (j=1,\ 2). \tag{14}$$

Рассмотрим функцию

$$F_k(z)=\frac{H'_{nk}(z)-H'_{nk}(0)}{H''_{nk}(0)}.$$

Поскольку $F_k(0)=0$, $F_k'(0)=1$, то в силу известных свойств регулярных функций заключаем, что при $n\geqslant n_0$ существует такая достаточно малая постоянная $c_{12}>0$, при которой для любого y, $|y|\leqslant c_{12}(\ln\ln n)^{\frac{1}{2}}$ есть единственное решение $z_k=z_k(y)$ уравнения

$$F_k(z)=\frac{y}{\sqrt{H''_{nk}(0)}}, \tag{15}$$

причем $|z_k|<c_{13}\leqslant\frac{1}{4}c_9$, где c_{13} — сколь угодно мало при достаточно малом c_{12}. Если y вещественное, то и z_k является вещественным.

В дальнейшем будем предполагать, что y — вещественное число, $y=o\left((\ln\ln n)^{\frac{1}{2}}\right)$ и $n\geqslant n_0$. В силу (13) получаем, что

$$F_k(z)=z+[\lambda(e^{\lambda z}-1-\lambda z)\ln\ln n+\varphi_k'(z)-\varphi_k'(0)-z\varphi_k''(0)]\times$$
$$\times\left(\lambda^2\ln\ln n+\varphi''(0)\right)^{-1}=z(1+B|z|),$$

откуда следует

$$z_k(y)=\frac{y}{\sqrt{H''_{nk}(0)}}\left(1+o(1)\right), \tag{16}$$

причем знаки $z_k(y)$ и y совпадают.

При $n\geqslant n_0$ введем функции распределения

$$K_{n0}(x)=\frac{1}{nS_{n0}(z_0)}\sum_{\substack{m\leqslant n\\ 0<g(m)<e^x}} g(m)^{z_0},$$

$$K_{n1}(x)=\frac{1}{nS_{n1}(z_1)}\sum_{\substack{m\leqslant n\\ -e^x<g(m)<0}} |g(m)|^{z_1}.$$

Обращая эти функции, получаем

$$\frac{1}{n}N\left(m\leqslant n,\ 0<g(m)<e^x\right)=S_{n0}(z_0)\int\limits_{(-\infty,\ x)} e^{-z_0u}\,dK_{n0}(u),$$

$$\frac{1}{n}N\left(m\leqslant n,\ -e^x<g(m)<0\right)=S_{n1}(z_1)\int\limits_{(-\infty,\ x)} e^{-z_1u}\,dK_{n1}(u),$$

откуда также имеем

$$\frac{1}{n}\ N\left(m\leqslant n,\ g(m)>e^{x}\right)=S_{n0}(z_0)\int\limits_{(x,\ \infty)} e^{-z_0 u}\,dK_{n0}(u),$$

$$\frac{1}{n}\ N\left(m\leqslant n,\ g(m)<-e^{x}\right)=S_{n1}(z_1)\int\limits_{(x,\ \infty)} e^{-z_1 u}\,dK_{n1}(u).$$

Полагая

$$L_{nk}(u)=K_{nk}\left(H'_{nk}(z_k)+u\sqrt{H''_{nk}(z_k)}\right),$$

после элементарных преобразований получаем, что величины

$$\frac{1}{n}\ N\left(m\leqslant n,\ 0<g(m)<e^{H'_{n0}(z_0)}\right),\ \frac{1}{n}\ N\left(m\leqslant n,\ g(m)>e^{H'_{n0}(z_0)}\right),$$

$$\frac{1}{n}\ N\left(m\leqslant n,\ -e^{H'_{n1}(z_1)}<g(m)<0\right),\ \frac{1}{n}\ N\left(m\leqslant n,\ g(m)<-e^{H'_{n1}(z_1)}\right)\tag{17}$$

равны

$$S_{nk}(z_k)\,e^{-z_k H'_{nk}(z_k)}\int e^{-z_k u\sqrt{H''_{nk}(z_k)}}\,dL_{nk}(u),\tag{18}$$

причем в первых двух случаях берется $k=0$, а в остальных $k=1$, область интегрирования в первом и третьем случаях $(-\infty,\ 0)$, а во втором и четвертом — $(0,\ \infty)$.

Покажем, что $L_{nk}(u)$ при $n\to\infty$ стремится к нормальному закону, и оценим быстроту сходимости. Для этого подсчитаем преобразование Фурье

$$\Psi_{nk}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\,dL_{nk}(u)=S_{nk}^{-1}(z_k)\,S_{nk}\left(z_k+\frac{it}{\sqrt{H''_{nk}(z_k)}}\right)\exp\left(-it\frac{H'_{nk}(z_k)}{\sqrt{H''_{nk}(z_k)}}\right).$$

В силу (11) при $|t|\leqslant c_{14}(\ln\ln n)^{\frac{1}{2}}$, где c_{14} — достаточно мало, имеем

$$\Psi_{nk}(t)=\exp\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{B|t|(t^2+1)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right).$$

Отсюда в силу неравенства (3) при достаточно малом c_{14} получаем

$$\Psi_{nk}(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}=\frac{B|t|(t^2+1)}{\sqrt{\ln\ln n}}\exp\left\{\frac{B|t|}{\sqrt{\ln\ln n}}+t^2\left(\frac{B|t|}{\sqrt{\ln\ln n}}-\frac{1}{2}\right)\right\}=$$

$$=\frac{B|t|(t^2+1)}{\sqrt{\ln\ln n}}\,e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Из неравенства Эссеена, полагая $T=c_{14}(\ln\ln n)^{\frac{1}{2}}$, заключаем, что

$$\rho_{nk}(u)=L_{nk}(u)-\Phi(u)=\frac{B}{T}+B\int\limits_{0}^{T}\left|\Psi_{nk}(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right|\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(1+\int\limits_{0}^{\infty}(t^2+1)\,e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt\right)=\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\,.$$

Подсчитаем интеграл в формуле (18). При $y\leqslant 0$ (тогда и $z_k\leqslant 0$)

$$\int\limits_{(-\infty,\ 0)} e^{-uz_k\sqrt{H''_{nk}(z_k)}}\,dL_{nk}(u)=J_{k1}+J_{k2},$$

где

$$J_{k1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-uz_k\sqrt{H''_{nk}(z_k)}-u^2/2}\,du=e^{\frac{1}{2}z_k^2H''_{nk}(z_k)}\,\Phi\left(z_k\sqrt{H''_{nk}(z_k)}\right),$$

$$J_{k2}=\int\limits_{(-\infty,\,0)}e^{-uz_k\sqrt{H''_{nk}(z_k)}}\,d\rho_{nk}(u)=\rho_{nk}(u)\,e^{-uz_k\sqrt{H''_{nk}(z_k)}}\Big|_{-\infty}^{-0}-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{0}\rho_{nk}(u)\,de^{-uz_k\sqrt{H''_{nk}(z_k)}}=\rho_{nk}(-0)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}=\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\,.$$

При $y\geqslant 0$ (тогда $z_k\geqslant 0$) аналогично

$$\int\limits_{(0,\,\infty)}e^{-uz_k\sqrt{H''_{nk}(z_k)}}\,dL_{nk}(u)=e^{\frac{1}{2}z_k^2H''_{nk}(z_k)}\,\Phi\left(-z_k\sqrt{H''_{nk}(z_k)}\right)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\,.$$

Таким образом, числа (17) равны

$$e^{H_{nk}(z_k)-z_kH'_{nk}(z_k)}\left(e^{\frac{1}{2}z_k^2H''_{nk}(z_k)}\,\Phi\left(-|z_k|\sqrt{H''_{nk}(z_k)}\right)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{B}{\sqrt[3]{\ln n}}\right) \tag{19}$$

в предположении, что в первом и во втором случаях берется $k=0$, в третьем и четвертом $k=1$, в первом и третьем случаях $y\leqslant 0$; во втором и четвертом $y\geqslant 0$.

Преобразуем (19). Сначала найдем асимптотическую формулу для z_k. Из (15) вытекает

$$e^{\lambda z_k}=1+\eta\left(1+\frac{\varphi''_k(0)}{\lambda^2\ln\ln n}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{\varphi'_k(z_k)-\varphi'_k(0)}{\lambda\ln\ln n}\,,$$

где

$$\eta=\frac{y\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{\sqrt{\ln\ln n}}\,.$$

В силу (13), (14) и (16)

$$e^{\lambda z_k}=1+\eta+\frac{B|\eta|}{\ln\ln n} \tag{20}$$

и

$$z_k=\frac{1}{\lambda}\ln(1+\eta)+\frac{B|\eta|}{\ln\ln n}\,. \tag{21}$$

Формулы (12), (20) и (21) дают оценку

$$H_{nk}(z_k)-z_kH'_{nk}(z_k)=(1-\lambda z_k)\,e^{\lambda z_k}\ln\ln n-\ln\ln n+\varphi_k(z_k)-z_k\varphi'_k(z_k)=$$

$$=-\frac{y^2}{2}+Q_n(y)+\ln\beta_k+B|\eta|. \tag{22}$$

Аналогично

$$z_k\sqrt{H''_{nk}(z_k)}=z_k|\lambda|\sqrt{\ln\ln n}\left(e^{\lambda z_k}+\frac{\varphi''_k(z_k)}{\lambda^2\ln\ln n}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=y+B|y|\left(|\eta|+\frac{1}{\ln\ln n}\right). \tag{23}$$

При $u \leqslant c_{15}$ справедливы оценки

$$e^{\frac{u^2}{2}} \Phi(u) \geqslant \frac{c_{10}}{1+|u|}, \tag{24}$$

$$\left(e^{\frac{u^2}{2}} \Phi(u)\right)' = \frac{B}{1+u^2}. \tag{25}$$

Воспользовавшись теоремой о среднем значении, (25) и (23), выводим

$$e^{\frac{1}{2} z_k^2 H''_{nk}(z_k)} \Phi\left(-|z_k| \sqrt{H''_{nk}(z_k)}\right) =$$

$$= e^{\frac{y^2}{2}} \Phi(-|y|) + \frac{B|y|}{1+y^2}\left(|\eta| + \frac{1}{\ln\ln n}\right).$$

Эта оценка, (22) и неравенство (24) дают для (19) выражение

$$\frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ \ln|g(m)| \gtrless H'_{nk}(0) + y\sqrt{H''_{nk}(0)},\ g(m) \gtrless 0\right) =$$

$$= \beta_k e^{Q_n(y)} \Phi(-|y|)\left(1 + \frac{B(|y|+1)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right), \tag{26}$$

где в случае $k=0$ берется $g(m) > 0$, а в случае $k=1$ берется $g(m) < 0$; если из первых знаков $\gtrless$ выбирается $<$, надо полагать $y \leqslant 0$, а когда берется $>$ следует считать $y \geqslant 0$.

Остается заменить в последнем выражении $H'_{nk}(0) + y\sqrt{H''_{nk}(0)}$ на $\lambda \ln\ln n + x|\lambda|(\ln\ln n)^{\frac{1}{2}}$. Имеем

$$y = \frac{\lambda \ln\ln n - H'_{nk}(0) + x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n}}{\sqrt{H''_{nk}(0)}} = x + \frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}} + \frac{B|x|}{\ln\ln n}.$$

При этом, если $x = o(\sqrt{\ln\ln n})$, то и $y = o(\sqrt{\ln\ln n})$. Полагая $y = x + \varkappa$, где $\varkappa = B(\ln\ln n)^{-\frac{1}{2}}$, получаем по теореме о среднем значении и (24), (25)

$$\Phi(-|y|) = \Phi(-|x|) + B|\varkappa| e^{-\frac{x^2}{2} + B|x\varkappa|} = \Phi(-|x|)\left(1 + \frac{B(|x|+1)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right).$$

Далее после элементарных расчетов

$$Q_n(y) = Q_n(x) + \frac{B(|x|+1)}{\sqrt{\ln\ln n}}.$$

Следовательно, согласно (26)

$$\frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ \ln|g(m)| \gtrless \lambda \ln\ln n + x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n},\ g(m) \gtrless 0\right) =$$

$$= \beta_k e^{Q_n(x)} \Phi(-|x|)\left(1 + \frac{B(|x|+1)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right),$$

если знаки x и y совпадают. Если же знаки x и y не совпадают, то из равенства

$$\frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ \ln|g(m)| \gtrless \lambda \ln\ln n + x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n},\ g(m) \gtrless 0\right) =$$

$$= \frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ \ln|g(m)| \gtrless H'_{nk}(0) + y\sqrt{H''_{nk}(0)},\ g(m) \gtrless 0\right) =$$

$$= \frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ g(m) \gtrless 0\right) - \frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ \ln|g(m)| \lessgtr H'_{nk}(0) +\right.$$

$$\left. + y\sqrt{H''_{nk}(0)},\ g(m) \gtrless 0\right)$$

(в среднем члене наше соглашение о выборе знаков $\gtrless$ не действует), (10), (26) и оценок $x=B(\ln\ln n)^{-\frac{1}{2}}$, $y=B(\ln\ln n)^{-\frac{1}{2}}$, рассуждая точно так же, как и выше, получаем

$$\frac{1}{n}N\Big(m\leqslant n,\ \ln|g(m)|\gtrless\lambda\ln\ln n+x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n},\ g(m)\gtrless 0\Big)=$$
$$=\beta_k+B(\ln n)^{-\frac{1}{3}}-\beta_k e^{Q_n(y)}\Phi(-|y|)\left(1+\frac{B(|y|+1)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)=$$
$$=\beta_k\Big(1-e^{Q_n(0)}\Phi(0)\Big)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}=$$
$$=\frac{1}{2}\beta_k+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}=\beta_k e^{Q_n(0)}\Phi(0)\left(1+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)=$$
$$=\beta_k e^{Q_n(x)}\Phi(-|x|)\left(1+\frac{B(|x|+1)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right).$$

Теорема доказана, так как случай $k=1$, $\omega_0=\omega_1$ является тривиальным.

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 2.IX.1971

Литература

1. А. Бакштис, О предельных законах распределения мультипликативных арифметических функций, Liet. matem. rink., **VIII** (1968), 5–39, 201–219, 643–680.
2. Й. Кубилюс, З. Юшкис, О распределении значений мультипликативных функций, Liet. matem. rink., **XI** (1971), 261–273.
3. Й. Кубилюс, Метод производящих рядов Дирихле в теории распределения аддитивных арифметических функций. I, Liet. matem. rink., **XI** (1971), 125–134.

MULTIPLIKATYVINIŲ FUNKCIJŲ DIDELIŲ ATSILENKIMŲ KLAUSIMU

J. Kubilius, A. Laurinčikas

(*Reziumė*)

Tiriamos realiosios multiplikatyvinės funkcijos $g(m)$, tenkinančios sąlygas (A), kuriose $a_p=|\ln|g(p)|-\lambda|$ ir $\lambda\neq 0$, $\delta>0$, c, c_j $(j=1,\ \dots,\ 5)$ – konstantos. Kai $n\to\infty$ ir $x=o(\sqrt{\ln\ln n})$, $x\leqslant 0$, tai skaičius natūrinių $m\leqslant n$, kuriems

$$0<g(m)<\exp(\lambda\ln\ln n+x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n}),$$

lygus

$$n\beta_0\Phi(-|x|)e^{Q_n(x)}\left(1+\frac{B(|x|+1)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right).$$

Čia

$$\beta_0=\frac{\omega_0+\omega_1}{2},\quad \omega_k=\prod_p\sum_{\substack{\alpha=0\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\qquad (k=0,\ 1),$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

$$Q_n(x)=\frac{x^2}{2}+\Big(\xi-(1+\xi)\ln(1+\xi)\Big)\ln\ln n,$$

$$\xi=\frac{x\operatorname{sgn}\lambda}{\sqrt{\ln\ln n}},$$

daugiklis B yra aprėžtas, priklausančios tik nuo λ, δ, c, c_j $(j=1,\ \dots,\ 5)$.

Tas pats teiginys yra teisingas ir skaičiui natūrinių $m\leqslant n$, tenkinančių nelygybę

$$g(m)>\exp(\lambda\ln\ln n+x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n}),$$

kai $x\geqslant 0$.

Analogiškos asimptotinės formulės galioja ir nelygybėms

$$-\exp(\lambda\ln\ln n+x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n})<g(m)<0,\ \text{jei}\ x\leqslant 0,$$

$$g(m)<-\exp(\lambda\ln\ln n+x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n}),\ \text{jei}\ x\geqslant 0.$$

ON LARGE DEVIATIONS OF MULTIPLICATIVE FUNCTIONS

J. Kubilius, A. Laurinčikas

(*Summary*)

Let $g(m)$ be a real-valued multiplicative function satisfying the conditions (A) with $a_p=$ $=|\ln|g(p)|-\lambda|$ and constants $\lambda\neq 0$, $\delta>0$, c, c_j $(j=1, \ldots, 5)$. For $n\to\infty$ and $x=o(\sqrt{\ln\ln n})$, $x\leqslant 0$ the number of natural $m\leqslant n$, for which

$$0<g(m)<\exp(\lambda\ln\ln n+x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n}),$$

is equal to

$$n\beta_0\Phi(-|x|)e^{Q_n(x)}\left(1+\frac{B(|x|+1)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)$$

where

$$\beta_0=\frac{\omega_0+\omega_1}{2},\quad \omega_k=\prod_p\sum_{\substack{\alpha=0\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\qquad (k=0,\ 1)$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

$$Q_n(x)=\frac{x^2}{2}+\Bigl(\xi-(1+\xi)\ln(1+\xi)\Bigr)\ln\ln n,$$

$$\xi=\frac{x\operatorname{sgn}\lambda}{\sqrt{\ln\ln n}},$$

and the multiplier B is bounded by a constant depending only on λ, δ, c, c_j $(j=1, \ldots, 5)$

The same is true for the number of $m\leqslant n$ satisfying the inequality

$$g(m)>\exp(\lambda\ln\ln n+x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n})\ \text{for}\ x\geqslant 0.$$

An analogous formula is valid for the inequalities

$$-\exp(\lambda\ln\ln n+x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n})<g(m)<0\ \text{if}\ x\leqslant 0,$$

$$g(m)<-\exp(\lambda\ln\ln n+x|\lambda|\sqrt{\ln\ln n})\ \text{if}\ x\geqslant 0.$$