УДК 511

ОБ ОЦЕНКЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СУММ ВИДА $\Sigma\varphi(2^j t)$

Г. А. Мисявичус

Настоящая заметка является продолжением статьи [2]. Применяемая в этой статье методика дала возможность указать некоторый класс функций, для которого имеет место окончательная в смысле порядка малости оценка скорости сходимости. Для удобства ссылок сохраним обозначения и нумерацию констант упомянутой статьи.

Теорема. *Пусть функция* $\varphi(t)$ *представима в виде*

$$\varphi(t)=\chi(\varepsilon_1)+\psi(t)$$

и для $\psi(t)$ *выполнены следующие условия.*

I. *При некотором* $0<\delta<1$

$$M\,|\psi(t)|^{3+\delta}<\infty. \tag{1*}$$

II. *При некоторых положительных* A_3 *и* α *имеет место неравенство*

$$\left(\int_0^1 |\psi(t+h)-\psi(t)|^6\,dt\right)^{\frac{1}{6}} \leqslant A_3 h^{\alpha}. \tag{2*}$$

III.

$$\sigma^2=\int_0^1 \varphi^2(t)\,dt+\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^1 \varphi(t)\,\varphi(T^j t)\,dt\neq 0. \tag{3*}$$

IV. *При* $u=\gamma\log n$ $(\gamma>0)$,

$$MD\,\{Y_{1,u}\mid \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_u,\ \varepsilon_{u+2},\ \ldots,\ \varepsilon_{2u+1}\}\geqslant c_{12}>0, \tag{4*}$$

где обозначено

$$Y_{k,u}=\varphi(T^{k+u-1}t)+\sum_{i=0}^{u-2}\varphi(T^{k+i}t)-\varphi(\varepsilon_{k+i+1},\ldots,\varepsilon_{k+u-1}), \tag{5*}$$

$$(k=1,\ \ldots).$$

Тогда для некоторой константы C_5, *зависящей лишь от* α, A_3, C_{12}, γ, σ, δ, *имеет место*

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant \frac{C_5}{\sqrt{n}}. \tag{1}$$

Замечание. Очевидно, что в условиях I – III теоремы имеет место неравенство

$$M\left(\varphi(T^{k+u-1}t)-\varphi(\varepsilon_{k+u})+\sum_{i=0}^{u-2}\varphi(T^{k+i}t)-\varphi(\varepsilon_{k+i+1},\ldots,\varepsilon_{k+u-1})\right)^2=c_{11}<\infty.$$

Легко убедиться, что и условие IV теоремы заведомо будет выполнено в случае, когда справедливо неравенство

$$D\left(\chi(\varepsilon_1)+\varphi(\varepsilon_1)\right)-4c_{11}\sqrt{M\left(\chi(\varepsilon_1)+\varphi(\varepsilon_1)\right)^2}>0.$$

Для расширения интервала, в пределах которого оценивается $f_{\tilde{Z}_n}(t)$, нам понадобится лемма.

Лемма. *В условиях теоремы существует такая константа* $\delta_1>0$, *что для* $|t|\leqslant\delta_1\sigma_u\sqrt{n}$ *справедлива оценка*

$$|f_{\tilde{Z}_n}(t)|\leqslant e^{-\frac{t^2}{(2u+2)\sigma u}}.$$

Доказательство. Положим

$$\tilde{Y}_{k,u}=\varphi(\varepsilon_{k+u},\ldots,\varepsilon_{k+2u-1})+\sum_{i=0}^{u-2}\varphi(\varepsilon_{k+i+1},\ldots,\varepsilon_{k+u+i})-$$

$$-\varphi(\varepsilon_{k+i+1},\ldots,\varepsilon_{k+u-1}).$$

Воспользуемся теперь оценкой (23) из [2], положив в (22) $l_i-k_i=u+1$:

$$|f_{\tilde{S}_n}(t)|\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\left(1-M|f_{\tilde{S}_{k_il_i}}(t\,|\,\mathfrak{F}_{k_i}\times\mathfrak{F}_{l_i})|^2\right)\right\}. \qquad (2)$$

Вспомнив определение условной характеристической функции и учитывая свойства условных математических ожиданий, можем преобразовать

$$M|f_{\tilde{S}k_il_i}(t\,|\,\mathfrak{F}_{k_i}\times\mathfrak{F}_{l_i})|^2=M|M\{e^{it\tilde{Y}_{k_i,u}}\,|\,\mathfrak{F}_{k_i}\times\mathfrak{F}_{l_i}\}|^2=$$

$$=M(M\{e^{it\tilde{Y}_{k_i,u}}\,|\,\mathfrak{F}_{k_i}\times\mathfrak{F}_{l_i}\}\,M\{e^{-it\tilde{Y}_{k_i,u}}\,|\,\mathfrak{F}_{k_i}\times\mathfrak{F}_{l_i}\}).$$

Используя лемму 4.7 из [1], после очевидных выкладок получаем

$$M|f_{\tilde{S}_{k_il_i}}(t\,|\,\mathfrak{F}_{k_i}\times\mathfrak{F}_{l_i})|^2=1-t^2MD\{\tilde{Y}_{k_i,u}\,|\,\mathfrak{F}_{k_i}\times\mathfrak{F}_{l_i}\}+$$

$$+\frac{\tilde{\Theta}|t|^3}{3}MM\{|\tilde{Y}_{k_i,u}|^3\,|\,\mathfrak{F}_{k_i}\times\mathfrak{F}_{l_i}\}+\frac{\tilde{\tilde{\Theta}}|t|^6}{36}M(M^2\{|\tilde{Y}_{k_i,u}|^3\,|\,\mathfrak{F}_{k_i}\times\mathfrak{F}_{l_i}\}).$$

Легко подсчитать, используя при этом условие II теоремы и неравенство Йенсена, что имеют место оценки

$$MM\{|\tilde{Y}_{k_i,u}|^3\,|\,\mathfrak{F}_{k_i}\times\mathfrak{F}_{l_i}\}\leqslant c_{12},$$

$$MM^2\{|\tilde{Y}_{k_i,u}|^3\,|\,\mathfrak{F}_{k_i}\times\mathfrak{F}_{l_i}\}\leqslant c_{13}.$$

Условие II вместе с IV дает, очевидно, при достаточно больших u, что

$$MD\{\tilde{Y}_{k_i,u}\,|\,\mathfrak{F}_{k_i}\times\mathfrak{F}_{l_i}\}\geqslant c_{14}.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$M|f_{\tilde{S}k_il_i}(t\,|\,\mathfrak{F}_{k_i}\times\mathfrak{F}_{l_i})|^2\leqslant 1-c_{14}t^2+\frac{c_{12}|t|^3}{3}+\frac{c_{13}|t|^6}{36}. \qquad (3)$$

Подберем постоянную δ_1 такой, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{c_{12}\delta_1}{3}+\frac{c_{13}\delta_1^4}{36}<c_{14}. \tag{4}$$

Утверждение леммы теперь следует из соотношений (2), (3) и (4), если вспомнить представление для $D\tilde{S}_n$, даваемое формулой (4) из [2].

Доказательство теоремы вполне аналогично доказательствам теорем 2, 3 из [2], если только более точно провести соответствующие оценки, используя условия теоремы.

Равенство (14) из [2] в случае $s=3$ запишется в виде

$$\log f_{Z'_n}(t)=-\frac{\Gamma_2\{S'_n\}}{2}\frac{t^2}{B_n^{(u)2}}+\frac{\Gamma_3\{S'_n\}}{3!}\frac{(it)^3}{(B_n^u)^3}+$$

$$+c_\delta^{(1)}(|t|^2+|t|^3)\frac{K_{3+\delta,n}}{\rho^{(n)(1-\delta)}} \tag{5}$$

при

$$|t|\leqslant\frac{\rho^{(n)}}{2\sqrt{2}H_6},$$

где

$$\rho^{(n)}=2\sqrt{2}H_6a\sqrt{\log(1+K_{3n}^{-1})},$$

$$K_{sn}=\frac{nM|\eta_1^u|^s u^{s-1}}{B_n^{(u)s}},$$

a — любое, H_6 — абсолютная константа. Если в равенстве (10) из [2] подобрать

$$r=\frac{2(1+\delta)}{\delta},$$

то соотношение (11) превратится в

$$\frac{DS'_n}{B_n^{(u)2}}=1+\frac{c_{\delta,3}}{\sigma_u\sqrt{n}}. \tag{6}$$

Из (5) и (6), а также имея в виду (16) в [2], выводим

$$\log f_{Z'_n}(t)=-\frac{t^2}{2}+\frac{c_{\delta,8}t^2}{\sigma_u\sqrt{n}}+\Theta_{3,u}\frac{M|\eta'|^3|t|^3}{\sigma_u^3\sqrt{n}}+$$

$$+\frac{M|\eta_1^u|^{3+\delta}u^{2+\delta}}{\sigma_u^{3+\delta}n^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}}(|t|^2+|t|^3).$$

Так как при достаточно больших u, $\sigma_u>0$, из последнего соотношения получаем

$$f_{Z'_n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\frac{c_{8,\delta}}{\sqrt{n}}(|t|^2+|t|^6)\right) \tag{7}$$

при

$$|t|<a\sqrt{\log\left(1+\frac{\sigma_u^3\sqrt{n}}{M|\eta_1^u|^3u^2}\right)}.$$

Из оценки (19) в [2] в случае $s=3$

$$M|\tilde{S}_n-S'_n|\leqslant\frac{8nM|\tilde{\eta}_1|^{3+\delta}}{C^{(n)2+\delta}}$$

следует оценка для характеристических функций

$$|f_{\tilde{Z}_n}(t)-f_{Z'_n}(t)| \leqslant \frac{c_\delta^{(12)}|t|\sqrt{n}}{C^{(n)2+\delta}}, \tag{8}$$

где

$$\tilde{Z}_n=\frac{S_n}{\sigma_u\sqrt{n}}, \qquad C^{(n)}=\frac{B_n^{(u)}}{u\,\rho^{(n)}}.$$

Кроме того, из условия II следует справедливость оценки

$$|f_{\tilde{Z}_n}(t)-f_{Z_n}(t)| \leqslant \frac{2A_3\sqrt{n}\,|t|}{2^{\alpha u}} \tag{9}$$

и согласно лемме 2 из [2]

$$|f_{\tilde{Z}_n}(t)| \leqslant e^{-\frac{t^2}{3\pi^2}} \quad \text{при} \quad |t| \leqslant C_8\,\frac{\sigma_u^2\sqrt{n}}{u}. \tag{10}$$

Применим лемму Эссеена ([3], § 39, теорема 1), положив $T=\delta_1\sigma_u\sqrt{n}$; δ_1 определяется условием (4), а $u=\gamma\log n$, $\gamma=\frac{2\lg_2 e}{\alpha}$, α – из условия II теоремы. Имеем

$$|F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi}+\frac{C_6}{\sqrt{n}}, \tag{11}$$

где

$$\varepsilon=\int_{-T}^{T}\frac{|f_{Z_n}(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}|}{|t|}\,dt \leqslant I_1+I_2+I_3+I_4+I_5,$$

$$I_1=\int_{-\rho^{(n)}}^{\rho^{(n)}}\frac{|f_{\tilde{Z}_n}(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}|}{|t|}\,dt, \qquad I_2=\int\limits_{\rho^{(n)}\leqslant|t|\leqslant\frac{\sigma_u\sqrt{n}}{u}}\frac{|f_{\tilde{Z}_n}(t)|}{|t|}\,dt,$$

$$I_3=\int\limits_{|t|>\rho^{(n)}}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{|t|}\,dt, \qquad I_4=\int\limits_{\frac{\sigma_u\sqrt{n}}{u}\leqslant|t|\leqslant\delta_1\sigma_u\sqrt{n}}\frac{f_{\tilde{Z}_n}(t)}{|t|}\,dt,$$

$$I_5=\int_{-T}^{T}\frac{|f_{\tilde{Z}_n}(t)-f_{Z_n}(t)|}{|t|}\,dt.$$

Интегралы $I_1, \ldots, I_5$ оцениваются тривиально с помощью оценок (8), (9) и (10) и леммы, что завершает доказательство теоремы.

Автор благодарит проф. Й. Кубилюса за внимание к работе и ценные советы.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
7. IX. 1971

Литература

1. Й. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962.
2. Г. Мисявичус, Асимптотическое разложение для характеристических функций сумм вида $\Sigma\varphi(2^k t)$, Liet. matem. rink., **XII**, № 1 (1972),
3. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.

APIE LIEKAMOJO NARIO ĮVERTINIMĄ $\Sigma\varphi(2^j t)$ PAVIDALO SUMŲ CENTRINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE

G. Misevičius

(*Reziumė*)

Šis darbas yra [2] darbo tęsinys. Naudojame tuos pačius pažymėjimus ir konstantų numeraciją.

Teorema. *Sakykime, funkciją* $\varphi(t)$ *galima užrašyti šiuo pavidalu*:

$$\varphi(t)=\chi(\varepsilon_1)+\psi(t)$$

ir $\psi(t)$ *tenkina* (1*), (2*), (3*) ir (4*) *sąlygas.*

Tuomet egzistuoja tokia konstanta C_5, *priklausanti tik nuo* α, A_3, C_{12}, γ, σ *ir* δ, *jog galioja nelygybė* (1).

ON THE EVALUATION OF THE REMAINDER TERM IN THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR THE SUM $\Sigma\varphi(2^j t)$

G. Misevičius

(*Summary*)

The present paper succeeds the autor's article [2]. For the sake of convenience we shall keep to the notations and the numeration of the constants used in the above article.

Theorem. *Let the function* $\varphi(t)$ *be presented in the form*

$$\varphi(t)=\chi(\varepsilon_1)+\psi(t),$$

where the function $\psi(t)$ *satisfies the conditions* (1*), (2*), (3*) *and* (4*). *The* $Y_{2,u}$ *in the condition* (4*) *is given by formula* (5*).

Then such a constant C_5 *exists, depending only on* α, A_3, C_{12}, γ, σ, δ *that the evaluation* (1) *is valid.*