

# Ichtiocenožės matematinis modelis su vėlavimu

Donatas Švitra, Giedrius Žemaitis

*Klaipėdos universitetas*

H. Manto 84, LT-92294 Klaipėda

E. paštas: donatas@ik.ku.lt; giedrius.zemaitis@yahoo.com

**Santrauka.** Šiame straipsnyje darbo autoriai aprašė Kuršių mariose egzistuojančią ekosistemą. Naudojantis bendrais ichtiocenožės matematiniais modeliais (2.1)–(2.2) modeliuota Kuršių marių ichtiocenožės dinamika Rungės–Kuto IV metodu pasinaudojus imitacinio modeliavimo programa „ModelMaker“. Gauti modelio skaitiniai sprendiniai  $F_1$ – $F_8$  palyginti su žuvų monitoringo eksperimentiniais duomenimis. Ichtiocenožės dinamika prognozuota iki 2016 metų.

**Raktiniai žodžiai:** Kuršių marių matematinis modeliavimas, matematiniai metodai ekologijoje, ichtiocenožės matematinis modeliavimas.

## 1 Įvadas

Kuršių mariose egzistuoja 50 rūšių žuvų, iš jų apie 20 rūšių – verslinių. Gausiausioje karpinių žuvų šeimoje – 22 rūšys. Lašišinių ir ešerinių žuvų šeimos turi po 3 rūšis, o erškėtingų, silkinių, stintinių, lydekių, šaminių, ungurinių, menkinių, dyglinių, plekšninių, ciegorinių, plokštažiaunių ir tubinių žuvų šeimos turi po 1–2 rūšis.

Antrai didesnei grupei, t.y. planktonu mintančių verslinių žuvų grupei, Kuršių mariose priskiriamos stintelė ir stinta, ožka, aukšlė ir dyglės. Šios žuvis sudaro ichtiofaunoje 23%. Bentosu mintančių verslinių žuvų grupei priskiriamas karšis, kuoja, žiobris, plakis, lynas, raudė, pūgžlys, ungurys ir jūrinis sykas. Ši grupė Kuršių marių ichtiofaunoje sudaro apie 44%.

Trečioji grupė – plėšriosios žuvis: sterkas, lydeka, vėgėlė, ešerys, salatis. Jos ichtiofaunoje sudaro apie 19%. Kitos, dažniausiai neverslinės žuvis Kuršių marių ichtiofaunoje sudaro apie 16%. Tačiau, kai kurių žuvų maisto komponentai yra mišrūs, pvz., ungurys minta bentosu ir žuvimis, karšis vasarą gali misti planktonu ir bentosu, jauni ešeriai minta bentosu, o stambūs – žuvimis.

Dėl meteorologinių sąlygų Nemuno ir kitų upių vandens nuotėkis ir debitas gana nepastovus. Dėlto keičiasi ir Kuršių marių vandens paviršiaus aukštis, sraunumas, mineralizacija ir kitos fizinės bei cheminės savybės. Tai turi įtakos vandens organizmams, o ypač jų dauginimuisi.

## 2 Matematinis modelis

Šiuo metu ekologinių sistemų matematinių modelių, kurie įvertina populiacijų dinamiką, galima rasti tiek pasaulio, tiek Lietuvos mokslininkų darbuose [1, 3, 4, 6, 5, 7]. Labai svarbu matematiškai modeliuoti Kuršių marių ekosistemos dinamiką ir parinkti

tinkamus modelio parametrus, kurie leistų modeliuojant prognozuoti kokia situacija mūsų laukia ateityje, tam, kad galėtumėme laiku imtis tinkamų priemonių žuvų populiacijos skaitlingumui palaikyti.

Šiame straipsnyje Kuršių marių ichtiocenožės dinamikos modeliavimui pasirinkome modelį (1)–(2) pasiūlytą R. Jančiausko ir D. Švitros darbe [6]. Šis modelis sudarytas iš 8 netiesinių diferencialinių lygčių su vėluojančiais argumentais, kurių apibendrintą modelį pateikiame (1)–(2). Šios lygtys apibendrina „plėšrūno-aukos“ uždavinį.

$$F'_i = r_{iF} F_i \left[ 1 + \sum_{j=1}^6 d_{ijF} \left( 1 - \frac{F_j}{K_{jF}} \right) + \sum_{j=7}^8 b_{ijF} \left( 1 - \frac{F_j}{K_{jF}} \right) + s_{iF} \left( 1 - \frac{\int_0^1 H_{iF}(u) F_i(t-u) du}{K_{iF}} \right) - \frac{1}{K_{iF}} \sum_{j=1}^{N_i^F - m_i + 1} \alpha_{ij}^F \sum_{g=1}^{n_j^F} y_{ig}^F F_i(t - h_{ig}^F - h_{ijF}) \right], \tag{1}$$

$$F'_i = r_{iF} F_i \left[ \sum_{j=1}^7 c_{ijF} \frac{F_j}{K_{jF}} + \sum_{j=7}^8 d_{ijF} \left( \sum_{j=1}^6 c_{ijF} \frac{F_j}{K_{jF}} - \frac{F_i}{K_{iF}} \right) + s_{iF} \left( 1 - \frac{\int_0^1 H_{iF}(u) F_i(t-u) du_i}{K_{iF}} \right) - \frac{1}{K_{iF}} \sum_{j=1}^{N_i^F - m_i + 1} \alpha_{ij}^F \sum_{g=1}^{n_j^F} y_{ig}^F F_i(t - h_{ig}^F - h_{ijF}) \right]. \tag{2}$$

Sistema (1) aprašo taikiųjų žuvų (aukų) populiaciją  $F_1$ – $F_6$ , o (2) parodo plėšrūnų ichtiocenožę  $F_7$ – $F_8$ .

Modelyje (1)–(2)  $r_{iF}$  – tiesinio augimo koeficientas,  $b_{ijF}$  – plėšriųjų žuvų įtakos koeficientas,  $s_{iF}$  – žuvų biomasės dinamikos koeficientas, priklausantis nuo sezono,  $d_{ijF}$  – konkurencijos koeficientas tarp žuvų populiacijų,  $\alpha_{ij}^F$  – charakterizuoja įnašą tam tikrai  $i$ -tai žuvų populiacijos grupei,  $m_i$ ,  $N_i^F$  – apibūdina  $i$ -tos rūšies maksimalų ir minimalų prieaugį per metus,  $n_i^F$  –  $i$ -tos rūšies nerštų skaičius per metus,  $h_{ig}$  – laikas tarp artimiausių nerštų,  $y_{ig}^F$  – nerštų proporcijos per metus,  $r_{iF}^0$  – tiesinis Maltuziano augimo koeficientas,  $c_{ijF}$  – žuvų dalis plėšrūnų racione;  $d_{ijF}$  – plėšriųjų žuvų konkurencijos koeficientas,  $K$  – talpos koeficientas,  $K_{iF}$  – taikiųjų žuvų talpos koeficientas,  $K_{jF}$  – plėšriųjų žuvų talpos koeficientas [6].

Lygtyse (1)–(2)  $y_{ig}$ ,  $h_{ijF}$  turi tenkinti tokias sąlygas:

$$\sum_g y_{ig}^F = 1, \quad h_{ijF} = m_i + j - 1. \tag{3}$$

O  $\alpha_{ij}^F$  modelyje (1)–(2) yra apibrėžti taip:

$$\sum_{j=1}^{N_i^F} \alpha_{ij}^F = 1, \quad \alpha_{ij}^F = \alpha_{i0}^F \cdot q_{iF}^{j-1}, \quad \text{kai } (0 < q_{iF} < 1) \tag{4}$$

Modelyje (1)–(2)  $r_{iF}^0$  išraiškos yra apibrėžiamos atitinkamai (5) ir (6) formulėmis

$$r_{iF}^0 = r_{iF} \left( 1 + \sum_{j=7}^8 b_{ijF} + \sum_{j=1}^8 d_{ijF} + s_{iF} \right), r_{iF}^0 = r_{iF} \left( 1 + \sum_{j=7}^8 d_{ijF} + s_{iF} \right). \quad (5)$$

(2) lygtyje  $n_i^F = 0$ , kai:

$$\sum_{g=1}^{n_i^F} y_{ig}^F F_i(t - h_{ig}^F - h_{ijF}) = F_i(t - h_{ijF}). \quad (6)$$

Modelio (1) išraiškoje  $b_{ijF}$ ,  $d_{ijF}$  apibrėžtas matricas gavome tokias:

$$(b_{ijF}) = \begin{bmatrix} 0,08 & 0,1 \\ 0,1 & 0,08 \\ 0,1 & 0,08 \\ 0,08 & 0,1 \\ 0,2 & 0,15 \\ 0,01 & 0,01 \end{bmatrix}, \quad (d_{ijF}) = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,3 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0,3 & 0,01 \\ 0 & 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,05 & 0,05 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

(2) išraiškoje  $c_{ijF}$ ,  $d_{ijF}$  apibrėžtas matricas gavome:

$$d_{ijF} = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_{ijF} = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,02 \\ 0,06 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,25 & 0,03 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

Toliau lygčių sistemoje įvedame pakeitimą:

$$s_{iF} \left( 1 - \frac{\int_0^1 H_{iF}(u) F_i(t - u) du}{K_{iF}} \right) = s_{iF} \left( 1 - \frac{F_i(t - 0,5)}{K_{iF}} \right). \quad (9)$$

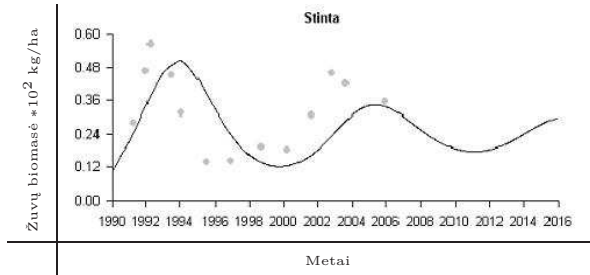
Pasinaudoję formulėmis (3)–(10) lygčių sistemą (1)–(2) modeliuosime skaitiniu Runge–Kuto IV metodu. Eksperimentinės ichtiocnozės parametrų reikšmės pateikiamame 1 lentelėje, kur  $i$  žymi žuvų populiacijos numerį.

**1 lentelė.** Kuršių marių ichtiocnozės modelio parametrų eksperimentinės reikšmės.

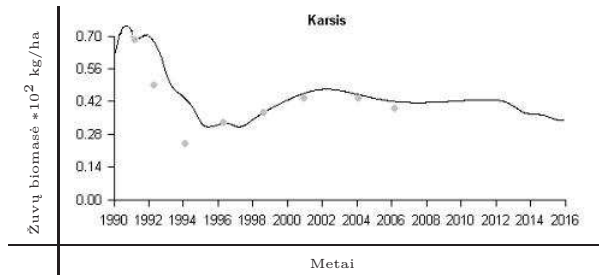
$i$	$r_{iF}^0$	$K_{iF}$	$q_{iF}$	$s_{iF}$	$N_i^F$	$n_i^F$	$m_i$	$y_{ig}^F$	$h_{ig}^F$
1	0,50	0,25	0,3	0,80	3	0	2	–	–
2	0,38	0,35	0,2	0,80	3	0	2	–	–
3	0,40	0,25	0,8	0,95	20	0	9	–	–
4	2,00	0,22	0,7	0,75	16	0	6	–	–
5	0,25	0,18	0,4	0,80	6	3	4	0,1	–
6	1,00	0,04	0,6	0,80	14	3	5	0,1	–
7	0,70	0,08	0,3	0,90	9	0	2	–	–
8	1,00	0,06	0,6	0,80	12	0	3	–	–

### 3 Ichtiocnozės matematinio modeliavimo rezultatai

Individų išgyvenamumas priklauso nuo populiacijos skaitlingumo laiko momentu  $t - 0,5$ . Šiuo metu (0,5 metų) yra stebima sezoniskumo įtaka. Populiacijos skaitlingumas labai stipriai priklauso nuo jos adaptacijos prie besikeičiančių sąlygų.



**1 pav.** Modelio (1)–(2) stintų populiacijos dinamikos skaitinis sprendinys gautas pagal (8)–(9) ir 1 lentelėje esančias parametų reikšmes, kai  $i = 1$ .



**2 pav.** Modelio (1)–(2) karšių populiacijos dinamikos skaitinis sprendinys gautas pagal (8)–(9) ir 1 lentelėje esančias parametų reikšmes, kai  $i = 3$ .

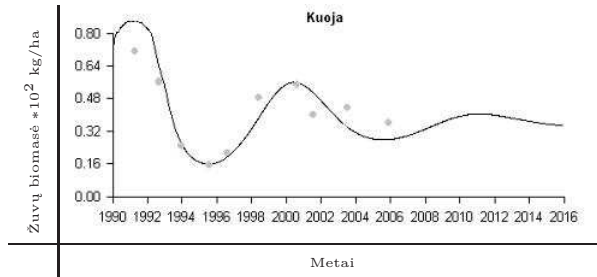
Naudodamiesi bendru ichtiocenožės matematinis modeliu (1)–(2) 1–5 pav. pateiksime imitacinio modeliavimo programa „ModelMaker“ gautus modelio skaitinius sprendinius, kurie aprašo Kuršių marių ichtiocenožės dinamiką 1990–2016 m. Gautus skaitinius sprendinius  $F_1$ – $F_8$  (ištininė linija) palyginsime su žuvų monitoringo eksperimentiniais duomenimis (taškai) paimtais iš [2, 9]. Atsižvelgiant į žuvų gausumo rodiklius modelyje aprašytos septynios taikios ir dvi plėšrios žuvys:  $F_1$  – stinta,  $F_2$  – žiobris,  $F_3$  – karšis,  $F_4$  – kuoja,  $F_5$  – plakis,  $F_6$  – pūgžlys,  $F_7$  – starkis,  $F_8$  – ešerys.

Neigiamas laikas stintelėms yra šilta vasara. Žinoma, kad optimali neršimo temperatūra 3–5°C, padidėjimas embrionų mirtingumo kykla prie  $t < 3^\circ\text{C}$  ir  $t > 12^\circ\text{C}$ . Šiltą vasarą Kuršių marių įvairiuose vandens sluoksniuose yra nepastovi ir palyginti aukšta temperatūra (18–22°C). Dugno sluoksniuose temperatūra yra (7,3–11°C). Kadangi stintelės gyvena iki 10 m gylio, todėl tai neigiamai veikia jų ikrus.

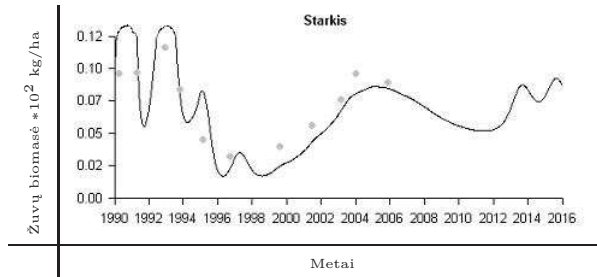
1 pav. gautas sprendinys nedaug skiriasi nuo realios situacijos, todėl galima teigti, kad artimiausiais metais stintų populiacija svyruos pagal gautą kreivę, t.y. iki 2012 metų biomasė mažės, o nuo 2012 metų pradės didėti.

2 pav. pateiktas Karšio skaitiniais metodais gautas modelio (1)–(2) sprendinys, kuris gana tiksliai atitinka žuvų monitoringo ir Statistikos departamento prie LRV duomenis [2, 9]. Taigi pagrįstai galime teigti, kad aukštas Karšio biomasės kiekis išliks ir artimiausiais metais ir staigių biomasės svyravimo neturėtų būti.

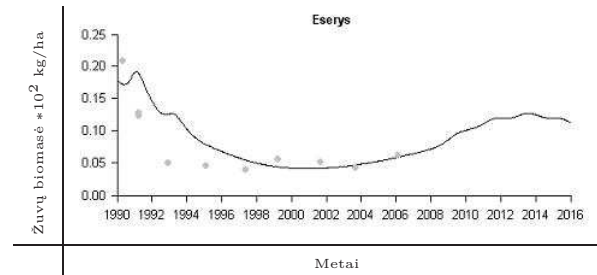
3 pav. pateiktas vienos gausiausiai esančios žuvies (kuojos) biomasės svyravimai. Gana ženklūs šios žuvies biomasės amplitudės svyravimai, pastaraisiais metais stabilizavosi. Tikėtina, kad pastarųjų 5-ių metų bėgyje šios žuvies ištekliai išliks gana gausūs, t.y. apie 35 kg/ha.



**3 pav.** Modelio (1)–(2) kuojų populiacijos svyravimo skaitinis sprendinys gautas naudojantis (8)–(9) ir 1 lentelėje esančiomis parametru reikšmėmis, kai  $i = 4$ .



**4 pav.** Modelio (1)–(2) starkių populiacijos dinamikos skaitinis sprendinys gautas pagal (8)–(9) ir 1 lentelėje esančias parametru reikšmes, kai  $i = 7$ .



**5 pav.** Modelio (1)–(2) ešerių populiacijos dinamikos skaitinis sprendinys gautas naudojantis (8)–(9) matricių ir 1 lentelėje esančiomis parametru reikšmėmis, kai  $i = 8$ .

4 pav. matyti, kad starkių biomasė nuo 1992-ųjų metų ėmė mažėti. Tačiau šios žuvies ištekliai netrukus ėmė sparčiai gausėti ir jau 2004 m. pasiekė savo vidutinę reikšmę, t.y. 9–10 kg/ha. Nuo 2007 m. starkių gausumas mažėja ir šis mažėjimas numatomas iki 2012 metų.

5 pav. pateiktas Ešerio – plėšrūno populiacijos svyravimai. Gana gausūs žuvies ištekliai nuo 1990 m. smarkiai nukrito ir siekė 5–7 kg/ha. Remiantis gautais skaitinės analizės duomenimis ešerio biomasė iki pat 2014 metų turėtų teigiamai augti ir pasiekti apie 13 kg/ha.

Ne itin gausūs žiobrio ištekliai pastarąjį dešimtmetį kilo, todėl remdamiesi modelio (1)–(2) skaitiniu sprendiniu galima teigti, kad gana aukštas lygis turėtų išlikti iki pat 2013 metų. O po 2013-ųjų žiobrio biomasė turėtų pradėti mažėti. 2004 metais stebimas plakio biomasės pikas, po kurio plakio populiacija ėmė sparčiai mažėti. Remdamiesi modelio (1)–(2) skaitiniu sprendiniu galima teigti, kad šis biomasės ma-

žėjimas tęsis bent iki 2016 metų. 1990–1993 m. stebimas smarkus pūgžlių gausumo kritimas. 1995–2000 m. buvo nedideli pakilimai iki 5 kg/ha ir 10 kg/ha. Pagal gautus skaitinius sprendinius galima daryti išvadą, kad artimiausiais metais šios žuvies ištekliai nebus gausūs ir sieks apie 3–5 kg/ha.

## Išvados

Kuršių marių ekosistemai ištirti buvo taikoma sudėtinga savireguliacinė sistema, kurioje svarbus vaidmuo tenka vėlavimo faktoriui. Tiriant buvo panaudota metodika taikoma sprendžiant populiacijų dinamikos uždavinius.

Parinkus tam tikrą biologinę prasmę turinčias parametrų reikšmes buvo gauti skaitiniai sprendiniai aprašantys ichtiocenožės dinamiką. Šie sprendiniai buvo gauti imitacinio modeliavimo programa „ModelMaker“ taikant skaitinį Rungės–Kuto IV metodą. Palyginus gautus šių modelių skaitinius sprendinius su eksperimentiniais duomenimis buvo gautas pakankamai geras jų sutapimas, kuris leidžia naudoti tirtą modelį prognozuojant būsimą Kuršių marių ichtiocenožės dinamiką.

## Literatūra

- [1] A. Astrauskas, E. Bernotas, R. Jovaiša. Žuvų rūšinės ir matematinės sudėties, gausumo bei erdvinio pasiskirstymo ypatumai. Ignalinos AE poveikis gamtai ir visuomenei: mokslinių straipsnių rinkinys / Lietuvos valstybinė mokslo programa. *Atominė energetika ir aplinka*, Ekologijos institutas, Vilnius, pp. 175–189, 1995.
- [2] K. Ādjers, R. Repečka, L. Ložys. Kuršių marių žuvų gausumo kaita kuršių mariose 1992–2000 metais (monitoringo duomenimis). *Žuvininkystė Lietuvoje*, **4**:133–144, 2002.
- [3] A.T. Bergrad. Smena zheptyv v prostoi 'ekosisteme. *V Mire Nauki*, **2**:64–73, 1984.
- [4] V. Denisovas, N. Jušenko and D. Švitra. Computer modelling of density dynamics of single-species laboratory insects' population. *Mathematical Modelling and Analysis*, **9**(4):327–340, 2004.
- [5] S.E. Jorgensen. *Fundamentals of Ecological Modeling*. 1994.
- [6] P. Янчаускас, Д. Швитра. Математическая модель биоценоза водоема-охладителя. *Математические модели в биологии И медицине*, **2**:66–90, 1987, Вильнюс.
- [7] Ю.С. Колесов. Исследования по устойчивости и теории колебаний. *Математические модели экологии*, pp. 3–40, 1979, Ярославль.
- [8] Г.В. Никольский. О причинах флуктуации численности у рыб. *Вопросы иктиологии*, **1**(4), 1963.
- [9] Statistikos departamentas prie LRV. *Žuvų sugavimas Kuršių mariose*, (1990–2006).

## SUMMARY

### Mathematical model of the ichthyocenose with delays

*D. Švitra, G. Žemaitis*

This article describes the authors' work the existing ecosystem in the Curonian Lagoon. Using the mathematical model of the ichthyocenose (1)–(2) is simulated the dynamics of the ichthyocenose in the Curonian Lagoon. It is done by using Runge–Kut IV method from this simulation program ModelMaker. The model numerical solutions of  $F_1 - F_8$  are compared with the experimental data for the monitoring of fish. The dynamics is projected to the year 2016.

*Keywords:* mathematical modeling of the Curonian Lagoon, mathematical methods in ecology, mathematical modeling of the ichthyocenose.