Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
56 t., 2015, 24–28

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Dviejų silpnai netiesinių stygų svyravimų sąveikos asimptotinis tyrimas

Olga Lavcel-Budko[1], **Aleksandras Krylovas**[1,2]

[1] *Mykolo Romerio universitetas, Ekonomikos ir finansų valdymo fakultetas*
Ateities 20, LT-08303 Vilnius
[2] *Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas*
Saulėtekio 11, LT-10223 Vilnius
E. paštas: olecka@gmail.lt, akr@fm.vgtu.lt

Santrauka. Nagrinėjamas dviejų stygų silpnai netiesinių svyravimų matematinis modelis. Uždavinio asimptotiniam artiniui rasti konstruojama suvidurkintoji integralinių diferencialinių lygčių sistema. Metodikai parodyti išsamiai išnagrinėtas paprastas pavyzdys.
Raktiniai žodžiai: asimptotiniai metodai, vidurkinimas, netiesinės bangos, rezonansai.

1 Uždavinio formulavimas

Nagrinėjami dviejų stygų netiesiniai svyravimai, esant mažai svyravimų amplitudei. Jie aprašomi pirmosios eilės diferencialinių lygčių sistema:

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - a_j^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = \varepsilon f_j(x, u_{jx}, u_{jxx}), \quad j = 1, 2,\ 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{1}$$

Taikymuose, tai sudaro dviejų vienmačių netiesiškai sąveikaujančių laukų sistemą. Kai $\varepsilon = 0$, (1) sistema aprašo 4 nepriklausomas bangas, bėgančias su greičiais a_1 ir a_2 į skirtingas puses. Kai $\varepsilon > 0$, dėl funkcijų f_j sistemoje gali prasidėti bangų sąveika. Jos nagrinėjamas ilgajame laiko intervale $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$ yra netrivialus asimptotinio integravimo uždavinys [2].

2 Rymano invariantai

Įvedus naujus kintamuosius v ir w ir pažymėjus $u_{jt}(t,x) = v_j$, $u_{jtt} = v_{jt}$, $u_{jtx} = v_{jx}$, $u_{jx}(t,x) = w_j$, $u_{jxx} = w_{jt}$, $u_{jxt} = w_{jx}$, (1) sistema perrašoma, kaip keturių pirmosios eilės diferencialinių lygčių hiperbolinė sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_j}{\partial t} - a_j^2 \dfrac{\partial w_j}{\partial x} = \varepsilon f_j, \\ \dfrac{\partial w_j}{\partial t} - \dfrac{\partial v_j}{\partial x} = 0, \quad j = 1, 2. \end{cases} \tag{2}$$

Nagrinėsime funkcijas f_j:

$$f_j = \sum_{i=1}^{2} \left(f_{ji0}\,(x) + \sum_{k=1}^{2} f_{jik}(u_k) \right) \frac{\partial u_i}{\partial x}. \tag{3}$$

Iš (2) sistemos gauname:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial v_j}{\partial t} - a_j \dfrac{\partial w_j}{\partial t}\right) + a_j\left(\dfrac{\partial v_j}{\partial x} - a_j \dfrac{\partial w_j}{\partial x}\right) = \varepsilon f_j(x, w_1, w_2, w_{1x}, w_{2x}), \\ \left(\dfrac{\partial v_j}{\partial t} + a_j \dfrac{\partial w_j}{\partial t}\right) - a_j\left(\dfrac{\partial v_j}{\partial x} + a_j \dfrac{\partial w_j}{\partial x}\right) = \varepsilon f_j(x, w_1, w_2, w_{1x}, w_{2x}). \end{cases} \tag{4}$$

Šiai sistemai Rymano invariantai yra:

$$\begin{aligned} r_1 &= v_1 - aw_1, & r_2 &= v_1 + aw_1, \\ r_3 &= v_2 - bw_2, & r_4 &= v_2 + bw_2, \\ w_1 &= \frac{r_2 - r_1}{2a}, & w_2 &= \frac{r_4 - r_3}{2b}. \end{aligned}$$

Sistema užrašyta invariantais atrodo taip:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r_1}{\partial t} + a\dfrac{\partial r_1}{\partial x} = \varepsilon \displaystyle\sum_{i=1}^{4}\left[f_{10i}(x) + \sum_{j=1}^{4} f_{1ji}(r)\right]\dfrac{\partial r_i}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial t} - a\dfrac{\partial r_2}{\partial x} = \varepsilon \displaystyle\sum_{i=1}^{4}\left[f_{20i}(x) + \sum_{j=1}^{4} f_{2ji}(r)\right]\dfrac{\partial r_i}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial r_3}{\partial t} + b\dfrac{\partial r_3}{\partial x} = \varepsilon \displaystyle\sum_{i=1}^{4}\left[f_{30i}(x) + \sum_{j=1}^{4} f_{3ji}(r)\right]\dfrac{\partial r_i}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial r_4}{\partial t} - b\dfrac{\partial r_4}{\partial x} = \varepsilon \displaystyle\sum_{i=1}^{4}\left[f_{40i}(x) + \sum_{j=1}^{4} f_{4ji}(r)\right]\dfrac{\partial r_i}{\partial x}. \end{cases} \tag{5}$$

Funkcijos f_{jik} nesunkiai išreiškiamos iš (3).

3 Suvidurkinta sistema

Tegul $\tau = \varepsilon t$ – lėtasis laikas, $y_1 = x - at$, $y_2 = x + at$, $y_3 = x - bt$, $y_4 = x + bt$ – greitieji charakteristiniai kintamieji, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Vidurkinimo pagal charakteristikas operatoriai apibrėžiami taip [1]:

$$\bigl\langle f(\tau, x, y)\bigr\rangle_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x, y_1, y_2, y_3, y_4) \begin{bmatrix} x = y_1 + at, \\ y_1 = y_1, \\ y_2 = y_1 + 2at, \\ y_3 = y_1 + (a - b)t, \\ y_4 = y_1 + (a + b)t \end{bmatrix} dt,$$

$$\bigl\langle f(\tau, x, y)\bigr\rangle_2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x, y_1, y_2, y_3, y_4) \begin{bmatrix} x = y_2 - at, \\ y_1 = y_2 - at, \\ y_2 = y_2, \\ y_3 = y_2 - (a + b)t, \\ y_4 = y_2 + (b - a)t \end{bmatrix} dt,$$

$$\left\langle f(\tau,x,y)\right\rangle_3 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau,x,y_1,y_2,y_3,y_4)\begin{bmatrix} x = y_3 + bt, \\ y_1 = y_3 + (b-a)t, \\ y_2 = y_3 + (a+b)t, \\ y_3 = y_3, \\ y_4 = y_3 + 2bt, \end{bmatrix} dt$$

$$\left\langle f(\tau,x,y)\right\rangle_4 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau,x,y_1,y_2,y_3,y_4)\begin{bmatrix} x = y_4 - bt, \\ y_1 = y_4 - (a+b)t, \\ y_2 = y_4 + (a-b)t, \\ y_3 = y_4 - 2bt \;\; y_4 = y_4 \end{bmatrix} dt.$$

Tolygiai tinkamą ilgajame laiko intervale $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$ (6) uždavinio asimptotinį sprendinį

$$r_j(x,t;\varepsilon) = R_j(\tau, y_j) + O(\varepsilon),$$

konstruojame spręsdami suvidurkintąją pagal charakteristikas [1] sistemą:

$$\frac{\partial R_k}{\partial \tau} = \left\langle \sum_{i=1}^{4}\left[f_{k0i}(x) + \sum_{j=1}^{4} f_{kji}(R)\right]\frac{\partial R_i(\tau,y_i)}{\partial y_i}\right\rangle_k, \quad k = 1,\ldots,4. \tag{6}$$

Pastebėkime, kad (6) sistema tiesiogiai nepriklauso nuo mažojo parametro ε ir todėl neturi asimptotinio integravimo problemų. Tai reiškia, kad uždavinį galima efektyviai spręsti skaitiniais metodais [2]. Autorių straipsnyje [1] buvo konstruojama suvidurkintos sistemos sprendinio polinominė aproksimacija.

4 Pavyzdys

Metodui parodyti paimsime (1) sistemos atvejį, kai uždavinį galima išspręsti tiksliai. Apsiribosime tik asimptotikos konstravimu, kurį šiuo atveju irgi gauname labai paprastai [4].

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \varepsilon\left[A\sin(\alpha x)u_{2x} + Bu_{2x}u_{2xx}\right], \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - b^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \\ u_1(0,x) = u_{1t}(0,x) = 0, \\ u_2(0,x) = \sin x, \quad u_{2t}(0,x) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

(7) sistemos antroji lygtis yra nepriklausoma ir ją galima išspręsti tiksliai:

$$u_2(t,x) = \frac{\sin(x-bt) + \sin(x+bt)}{2}. \tag{8}$$

Suradus sprendinio pirmąją ir antrąją išvestines

$$u_{2x}(t,x) = \frac{\cos(x-bt) + \cos(x+bt)}{2},$$

$$u_{2xx}(t,x) = -\frac{\sin(x-bt) + \sin(x+bt)}{2} \tag{9}$$

įrašome (4) į (7) sistemos pirmąją lygtį:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= \varepsilon \biggl[A \sin \alpha x \cdot \frac{\cos(x-bt)+\cos(x+bt)}{2} \\
&\quad - B \cdot \frac{\cos(x-bt)+\cos(x+bt)}{2} \cdot \frac{\sin(x-bt)+\sin(x+bt)}{2} \biggr] \\
&= \varepsilon \biggl[\frac{A}{4} \Bigl(\sin\bigl((\alpha+1)x - bt\bigr) + \sin\bigl((\alpha-1)x + bt\bigr) \\
&\quad + \sin\bigl((\alpha+1)x + bt\bigr) + \sin\bigl((\alpha-1)x - bt\bigr)\Bigr) \\
&\quad - \frac{B}{8} \Bigl(\sin\bigl(2(x-bt)\bigr) + \sin\bigl(2(x+bt)\bigr) + 2\sin(2x)\Bigr)\biggr]. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Pažymėję (10) sistemos dešinę pusę $\varepsilon f(t,x)$, užrašome suvidurkintąją sistemą:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_1}{\partial \tau} &= \bigl\langle f(t,x) \bigr\rangle_1 \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s, y_1 + as)\, ds, \\
\frac{\partial R_2}{\partial \tau} &= \bigl\langle f(t,x) \bigr\rangle_2 \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s, y_2 - as)\, ds. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Rezonansiniu atveju (4) sistemos dešinė pusė nelygi nuliui. Tai atsitinka, kai $a = b$ arba $\alpha = \frac{b}{a} + 1$. Galime pastebėti, kad nerezonansiniu atveju bangos u_1 nėra, t. y. $u_1 \equiv 0$.

Išnagrinėsime rezonansinį atvejį, kai $a = b = 1$, $\alpha = 2$ ir $R_1(0,y) = 0$, $R_2(0,y) = 0$. Tada gauname:

$$\begin{aligned}
R_1(\tau, y_1) &= \biggl(\frac{A}{4} \sin(y_1) - \frac{B}{8} \sin(2y_1) \biggr) \tau, \\
R_2(\tau, y_2) &= \biggl(-\frac{A}{4} \sin(y_2) - \frac{B}{8} \sin(2y_2) \biggr) \tau.
\end{aligned}$$

Taikant asimptotinio integravimo metodą, parodysime dviejų stygų profilio kitimo dinamiką. Kadangi turime Rymano invariantų formules $R_1 \approx u_{1t} - u_{1x}$ ir $R_2 \approx u_{1t} + u_{1x}$, gauname, kad $u_{1x} \approx \frac{R_2 - R_1}{2}$.

Grįžtame prie greitųjų charakteristinių kintamųjų $y_1 = x - t$, $y_2 = x + t$ ir užrašome u_1 stygos profilio lygtį

$$\begin{aligned}
u_1(t,x) &\approx \int \frac{R_2 - R_1}{2}\, dx \\
&= \varepsilon t \biggl(\frac{B}{32} \cos(2x + 2t) + \frac{A}{8} \cos(x+t) + \frac{A}{8} \cos(x-t) - \frac{B}{32} \cos(2x - 2t) \biggr).
\end{aligned}$$

Pastebėkime, kad taikant gerai žinomą formulę [4], (10) lygtis sprendžiama tiksliai ir funkcija u_1 užrašoma taip:

$$u_1(t,x;\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t dT \int_{x-t+T}^{x+t-T} f(T,X)\, dX. \qquad (12)$$

Įrašę į (12) formulę vietoje $f(t,x)$ (10) reiškinį, gauname

$$u_1(t,x;\varepsilon) = U_1^0\left(\varepsilon t, x-t, x+t\right) + \varepsilon U_1^1\left(t,x\right),$$

$$\begin{aligned} U_1^0(\varepsilon t, x-t, x+t) = \varepsilon t\biggl(&\frac{A}{8}\bigl(\cos(x+t)+\cos(x-t)\bigr)\\ &+\frac{B}{32}\bigl(\cos 2(x+t)-\cos 2(x-t)\bigr)\biggr), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1^1(t,x) = \frac{A}{8}\biggl(&\sin(x-t)-\sin(x+t)+\frac{1}{4}\bigl(\sin(3x+t)-\sin(3x-t)\bigr)\\ &+\frac{1}{12}\bigl(\sin 3(x-t)-\sin 3(x+t)\bigr)\biggr)+\frac{B}{32}\bigl(\sin 2(x-t)+\sin 2(x+t)\bigr). \end{aligned}$$

Funkcija U_1^0 sutampa su sukonstruotu asimptotiniu artiniu ir yra $O(1)$ eilės (t. y. aprėžta) ilgajame laiko intervale $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$. Funkcija U_1^1 periodinė pagal abu kintamuosius t, x (bendruoju atveju kvaziperiodinė) aprėžta ir todėl asimptotinio artinio paklaida yra $O(\varepsilon)$ eilės (ilgajame laiko intervale).

5 Išvados ir rezultatai

Išnagrinėta dviejų stygų silpnai netiesinius svyravimus aprašanti antrosios eilės diferencialinių lygčių sistema su mažuoju parametru. Šios sistemos asimptotiniam artiniui rasti sukonstruota suvidurkintų lygčių integralinė diferencialinė sistema. Ji leidžia rasti tolygiai tinkamą ilgajame laiko intervale asimptotinį sprendinį. Parodyta, kaip nustatyti rezonanso atsiradimo sąlygas. Išnagrinėtas paprastas pavyzdys, iliustruojantis asimptotinio artinio konstravimo metodiką.

Literatūra

[1] A. Krylovas and R. Čiegis. Approximation of hyperbolic weakly nonlinear system. *J. Nonlinear Math. Phys.*, **8**(4):458–470, 2001.

[2] A. Krylovas and R. Čiegis. A review of numerical asymptotic methods for weakly nonlinear waves. *Math. Model. Anal.*, **9**(3):209–222, 2004.

[3] A. Krylovas, O. Lavcel-Budko and P. Miškinis. Asymptotic solution of the mathematical model of nonlinear oscillations of absolutely elastic inextensible weightless string. *Nonlinear Anal. Model. Control.*, **15**(3):307–323, 2010.

[4] V. Paulauskas. *Matematinės fizikos lygtys.* Mintis, Vilnius, 1974, 456 pp.

SUMMARY

Analysis of asymptotic for a model of nonlinear oscillations of the two string

O. Lavcel-Budko, A. Krylovas

The mathematical model of two strings nonlinear oscillations is presented. To find uniformly valid in a long time interval asymptotic solution of the problem an averaging scheme is constructed.

Keywords: resonance, asymptotic methods, nonlinear waves, averaging.