LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI
51 tomas, 2010, 465–469

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Svarbiausios konstantos tikimybių teorijoje

Juozas Juvencijus Mačys

Matematikos ir informatikos institutas
Akademijos 4, LT-08663 Vilnius
E. paštas: jmacys@ktl.mii.lt

Santrauka. Apžvelgiama svarbiausių matematikos konstantų vieta tikimybių teorijos kursuose, aptariama šiandieninė tų konstantų teorijos būklė.

Raktiniai žodžiai: Oilerio–Maskeronio konstanta, skaičius π, skaičius e, iracionalumas, tikimybių teorija.

Įvadas

Sutartinai laikomasi nuomonės, kad svarbiausios matematikos konstantos yra trys: natūraliųjų logaritmų pagrindas e, apskritimo ilgio ir jo skersmens santykį išreiškiantis skaičius π ir su harmonine eilute susijusi Oilerio–Maskeronio (Euler, Mascheroni) konstanta γ. Šiame straipsnelyje apžvelgsime, kur šios konstantos sutinkamos tikimybių teorijos universitetiniame kurse, kiek jos svarbios bendrajai matematinei kultūrai, kiek elementarus jų iracionalumo įrodymas.

Kur tikimybėse atsiranda pagrindinės konstantos?

Biufono uždavinys. *Plokštuma suliniuota lygiagrečiomis tiesėmis, viena nuo kitos nutolusiomis vienetu. Ant plokštumos atsitiktinai metama adata, kurios ilgis* $\frac{1}{2}$. *Raskite tikimybę, kad adata kirs kurią nors tiesę.*

Sąlygoje (nors tai ir nepasakyta glaustumo sumetimais) žodis „atsitiktinai“ reiškia: 1) adatos centro padėtis x tolygiai pasiskirsčiusi vienetinio ilgio atkarpoje, statmenoje lygiagrečiosioms tiesėms, t.y. tikimybė taškui x patekti į atkarpą $(x_0, x_0 + \varDelta x)$ proporcinga $|\varDelta x|$; 2) adatos ir lygiagrečiųjų tiesių sudaromas kampas φ tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, \pi]$, t.y. tikimybė kampui φ patekti į atkarpą $(\varphi_0, \varphi_0 + \varDelta\varphi)$ proporcinga $|\varDelta\varphi|$; 3) dydžiai x ir φ nepriklausomi.

Adata kerta lygiagretę tada ir tik tada, kai $x \leqslant \frac{1}{2}\sin\varphi$. Vadinasi, tikimybė p kirsti lygiagretę lygi ploto po šia sinusoide ir stačiakampio $[0, \pi; 0, 1]$ ploto santykiui:

$$p = \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin\varphi d\varphi : \pi = \frac{1}{\pi}.$$

Gautąją formulę galima panaudoti π reikšmei nustatyti eksperimentiškai. Iš tikrųjų, jei adata metama n kartų (n didelis, pasirenkamas iš anksto), o iš jų adata kirto tiesę m kartų, tai $\frac{m}{n} \approx p = \frac{1}{\pi}$, ir gauname apytikslę π reikšmę $\pi \approx \frac{n}{m}$.

Šį uždavinį paskelbė 1760 m. prancūzų gamtininkas ir statistikas, vienas iš geometrinių tikimybių teorijos kūrėjų Ž. Biufonas (Georges Buffon, 1707–1788). Pats jis

π reikšmės taip nustatyti nebandė, bet dar 1850 m. buvo atlikta 5000 bandymų ir gauta apytikslė π reikšmė 3,1596. Dabar kompiuteriai gali greitai atlikti milijonus tokių bandymų virtualiai, nors yra daug tikslesnių būdų π apskaičiuoti (ir jau žinomi milijardai skaičiaus π tikslių dešimtainių ženklų).

Vis dėlto π tikimybių teorijoje atsirado anksčiau, nei Biufono uždavinys. Dar 1730 metais Muavras (Abraham de Moivre, 1667–1754; gimė Prancūzijoje, bet visą savo sąmoningą gyvenimą pragyveno Anglijoje) paskelbė lokaliosios teoremos ir $n!$ asimptotinės formulės įrodymus, skyrium imant, įrodė, kad Bernulio schemos atveju ($p = q = \frac{1}{2}$)

$$P_{2n}(n) = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \sim \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Muavras apytiksliai apskaičiavo konstantą C, bet paprašė Sterlingą (James Stirling, 1692–1770) pasidomėti, ar C nėra susijusi su kitomis žinomomis konstantomis. Sterlingui pavyko nustatyti, kad remiantis Voliso (John Wallis, 1616–1703) formule, C lygi $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Todėl Sterlingo (teisingiau – Muavro ar bent jau Muavro–Sterlingo) formulę galima užrašyti dabar mums įprasta asimptotine lygybe

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n},$$

o tikimybes $P_n(m)$ – kaip

$$P_n(m) \sim 2^{1/2} \pi^{-1/2} n^{-1/2} e^{-(2m-n)^2/(2n)}.$$

Natūralu, kad iš čia, kaip ir turi būti, gauname $P_{2n}(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Taigi būtent nuo Muavro prasidėjo normaliojo tankio $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ ir normaliojo skirstinio $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2} dx$ istorija.

Jau aptarėme, kaip skaičius e atsirado ribinių skirstinių teorijoje. Įdomu, kad jis atsiranda ir klasikiniame uždavinyje.

Išsiblaškiusio siuntėjo uždavinys. *Tūlas siuntėjas parašė n laiškų, po vieną kiekvienam adresatui, kiekvieną laišką įdėjo į atskirą voką ir vokus užklijavo. Tada jis atsitiktinai užrašė visus n adresų ant kiekvieno voko po vieną. Kam lygi tikimybė, kad nė vienas adresatas negaus jam skirto laiško*?

Nesunku suskaičiuoti (žr. [1]), kad ta tikimybė lygi

$$p_0 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

Kokia jos apytikslė reikšmė dideliems n? Užrašę skleidinį

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots, \tag{1}$$

matome, kad

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \right) = \frac{1}{e}.$$

Be to, p_0 skiriasi nuo e^{-1} mažiau kaip $\frac{1}{(n+1)!}$, taigi jau su $n = 4$ šimtųjų tikslumu ieškomoji tikimybė $p_0 \approx \frac{1}{e} \approx 0,37$.

Šis uždavinys, suformuluotas matematikos kalba, vadinamas *sutapimų uždaviniu*:

Yra n elementų, išdėstytų tam tikra tvarka. Elementai atsitiktinai perstatomi (visi $n!$ kėlinių vienodai tikėtini). Kam lygi tikimybė, kad bent vienas elementas atsidurs savo vietoje?

Kadangi įvykis „bent vienas elementas atsidurs savo vietoje" priešingas įvykiui „nė vienas elementas neatsidurs savo vietoje", tai ieškomoji tikimybė $p_{\geqslant 1} = 1 - p_0 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$, kai n didelis, apytiksliai lygi $1 - e^{-1} \approx 0,63$.

Praktikoje šis uždavinys įvairiausiose situacijose taikomas labai dažnai.

Pagaliau apie Oilerio–Maskeronio konstantą γ. Su ja tikimybių teorijoje ir matematinėje statistikoje susiduriama kiekvieną kartą, kai kalbama apie ekstremaliųjų reikšmių skirstinius. Paprasčiausias iš jų yra vadinamasis standartinis Gumbelio (arba log-Veibulo, dvigubasis eksponentinis) skirstinys $F(x) = \exp\{-e^{-x}\}$, kurio vidurkis lygus būtent γ.

Apie svarbiausiųjų konstantų savybes

Pagrindinės žinios apie svarbiausias konstantas – neatskiriama matematinės kultūros dalis. Deja, dėl vietos ar laiko stokos tikimybių teorijos kursuose apeinami net visiškai būtini faktai. Sakysime, B. Gnedenkos vadovėlyje [3] kalbant apie normaliojo dėsnio normuotumo sąlygą

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2}\, dx = 1$$

pasakyta, kad tai analizėje žinomas Puasono integralas, ir viskas. O štai dažnas skaitytojas tokio integralo nė negirdėjo, ir būtų visai pravartu bent išnašoje pamatyti šios lygybės įrodymą. Dauguma tų įrodymų sudėtingi, o bene paprasčiausias būtų toks:

$$\begin{aligned}\left(\int e^{-x^2/2}\, dx\right)^2 &= \int e^{-x^2/2}\, dx \cdot \int e^{-y^2/2}\, dy = \iint e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r\, dr\, d\varphi = -2\pi e^{-r^2/2}\Big|_0^{\infty} = 2\pi,\end{aligned}$$

$$\int e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

Beje, V. Feleris savo garsiajame vadovėlyje [2] ne tik įrodo Sterlingo formulę – jis pateikia labai tikslų jos variantą, kurio nerasi nė viename analizės kurse:

$$\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{1/(12n+1)} < n! < \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{1/(12n)}.$$

Seniai įrodyta, kad konstantos e ir π transcendenčios, bet įrodymas per daug sudėtingas. O štai įrodyti, kad e ir π iracionalios – žymiai lengviau.

Iš skleidinio (1) aišku, kad

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{(2n-1)!} < e^{-1} < 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{1}{(2n)!} \tag{2}$$

kiekvienam n. Tarkime priešingai, kad e racionalus, tada racionalus ir e^{-1}, t.y. $e^{-1} = \frac{r}{s}$, $r, s \in \mathbf{N}$. Nelygybę (2) parašykime būtent šitam s:

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{(2s-1)!} < \frac{r}{s} < 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{(2s-1)!} + \frac{1}{(2s)!}.$$

Padauginę ją iš $(2s)!$, matome, kad sveikasis skaičius atsiduria tarp dviejų gretimų sveikųjų:

$$\begin{aligned}(2s)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{(2s-1)!}\right) &< 2r(2s-1)! \\ &< (2s)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{(2s-1)!}\right) + 1.\end{aligned}$$

Prieštara.

Įdomu, kad šitą įrodymą galima perrašyti „mokykliškai“ – nesinaudojant Teiloro eilute (žr. [4]).

Įrodyti, kad skaičius π iracionalus – jau sunkiau. Paprasto ir aiškaus įrodymo paieškos tęsiasi, ir vos ne kasmet paskelbiamas naujas įrodymo variantas. Tie įrodymai dirbtiniai, sunkiai įsimenami, remiasi giliais matematiniais faktais. Siūlome paprastą ir aiškų įrodymą (beje, jį irgi galima perrašyti mokiniams, žr. [4]).

Tarkime priešingai, kad π racionalus, $\pi = \frac{p}{q} = \frac{2p}{2q} = \frac{m}{2q}$. Tada $2q\pi = m$, taigi $\sin m = 0$, $\cos m = 1$. Elementarią nelygybę

$$x - \frac{x^3}{3} \leqslant \sin x \leqslant x \quad (x \geqslant 0)$$

dauginkime iš x ir integruokime:

$$x^2 - \frac{x^4}{3} \leqslant x \sin x \leqslant x^2,$$
$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{3 \cdot 5} \leqslant -x\cos x + \sin x \leqslant \frac{x^3}{3}.$$

Tą procedūrą – dauginti iš x ir integruoti – kartojame n kartų. Kadangi $x^k \cos x$ ir $x^k \sin x$ integruojant duoda tik sveikuosius koeficientus, gauname nelygybę

$$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!!} \leqslant P_n(x)\sin x + Q_n(x)\cos x \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!},$$

kur $P_n(x)$ ir $Q_n(x)$ – daugianariai su sveikaisiais koeficientais. Įstatykime į ją $x = m$, $\sin m = 0$, $\cos m = 1$, tada nelygybėje

$$\frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!!} - \frac{m^{2n+3}}{(2n+3)!!} \leqslant Q_n(m) \leqslant \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!!}$$

galime paimti tokį didelį n, kad tiek dešinėje, tiek ir kairėje pusėje gausime kiek norint mažą teigiamąjį skaičių. Prieštara, kadangi $Q_n(m)$ – sveikasis skaičius.

Pagaliau pereikime prie paslaptingosios konstantos – Oilerio–Maskeronio γ. Ji apibrėžiama kaip riba

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\right)$$

ir lygi $\gamma = 0,5772\ldots$. Nors jau apskaičiuoti milijardai jos dešimtainių ženklų, bet vis dar neįrodyta, kad γ – iracionalusis skaičius (ką jau bekalbėti apie transcendentumą). Literatūroje ir internete yra keliasdešimt formulių, apibrėžiančių γ ar susijusių su γ, ir labai netikėta, kad niekur neparašyta pati paprasčiausia:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{n^2}\right).$$

Iš tikrųjų,

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n\right) + \frac{2}{n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2-1} - \ln n^2\right) - \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

todėl $\lim_{n\to\infty} a_n = 2\gamma + 0 - \gamma - 0 = \gamma$. Kadangi

$$a_n - a_{n-1} = \frac{2}{n} - \left(\frac{1}{n^2-2n+2} + \frac{1}{n^2-2n+3} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right),$$

tai, γ galima apibrėžti ir eilute:

$$\gamma = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n - a_{n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2-2n+2} - \cdots - \frac{1}{n^2}\right).$$

Literatūra

[1] A.A. Borovkov. *Teoriya veroyatnostei.* Nauka, Moskva, URSS, 1976–2003 (rusų k.).

[2] V. Feller. *Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i ee primeneniya.* Mir, Moskva, 1984 (rusų k.).

[3] B.V. Gnedenko. *Kurs teorii veroyatnostei.* Nauka, GITTL, Moskva, URSS, 1954–2007 (rusų k.).

[4] J.J. Mačys. An elementary proof of number pi irrationality. In *Proceedings of the 10th International Conference "Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives"*, pp. 261–265. TEV, 2009.

SUMMARY

On the main constants in the probability theory
J.J. Mačys
We consider the place of the main mathematical constants in the probability theory. The present situation of their elementary theory is discussed.

Keywords: Euler–Mascheroni constant, number π, number e, irrationality, probability theory.