Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 542–546

Ekstremaliųjų reikšmių tankių perkėlimo teoremos

Arvydas JOKIMAITIS, Algimantas AKSOMAITIS (KTU)
el. paštas: arvydas.jokimaitis@ktu.lt, algimantas.aksomaitis@ktu.lt

1. Įvadas

Tarkime, kad $X_1, X_2, ..., X_n, \ldots$ – nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su pasiskirstymo funkcija $F(x)$ ir tankiu *p(x)*. Apibrėšime atsitiktinius dydžius

$$Z_n = \max(X_1, ..., X_n), \quad W_n = \min(X_1, ..., X_n).$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{a_n, n \geqslant 1\}$ ir $\{b_n > 0, n \geqslant 1\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) \tag{1}$$

visuose funkcijos H tolydumo taškuose; čia H – neišsigimusi skirstinio funkcija.

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{c_n, n \geqslant 1\}$ ir $\{d_n, n \geqslant 1\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x), \tag{2}$$

visuose funkcijos L tolydumo taškuose; čia L – neišsigimusi skirstinio funkcija.

Jei tenkinama (1) lygybė, sakysime, kad skirstinio funkcija F priklauso ribinio skirstinio H traukos sričiai (žymėsime$F \in D(H)$); jei tenkinama (2) lygybė, sakysime, kad skirstinio funkcija F priklauso ribinio L traukos sričiai (žymėsime$F \in D(L)$).

Kaip žinome (žr. [2]), egzistuoja trys ribinio skirstinio H tipai:

$$H_{1,\alpha}(x) = \exp(-x^{-\alpha}), \quad x > 0, \ \ \alpha > 0;$$

$$H_{2,\alpha}(x) = \exp\big(-(-x)^{\alpha}\big), \quad x \leqslant 0, \ \ \alpha > 0;$$

$$H_{3,0}(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-x}), \quad x \in \mathbf{R},$$

ir egzistuoja trys ribinio skirstinio L tipai:

$$L_{1,\gamma}(x) = 1 - \exp\big(-(-x)^{-\gamma}\big), \quad x < 0, \ \ \gamma > 0;$$

$$L_{2,\gamma}(x) = 1 - \exp(-x^{\gamma}), \quad x > 0, \ \ \gamma > 0;$$

$$L_{3,0}(x) = 1 - \exp(-\mathrm{e}^{x}), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Pažymėkime,

$$p_{Z_n}(x) = nb_n p(a_n + b_n x) F^{n-1}(a_n + b_n x),$$

čia $p_{Z_n}(x)$ – atsitiktinio dydžio $(Z_n - a_n)/b_n$ tankis.

Suformuluosime sąlygas, kurias turi tenkinti skirstinio funkcija F, kad tiesiškai normuoto maksimumo tankis $p_{Z_n}(x)$ konverguotų į ribinio skirstinio H tankį $H'(x)$, t.y.

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_n}(x) = H'(x). \tag{3}$$

1 TEOREMA. *Jei $F \in D(H))$ ir*

a) $H = H_{1,\alpha}$, *tai* (3) *sąryšis bus teisingas intervale* $(0; \infty)$ *tada ir tik tada, kai tankio funkcija* $p(x)$ *yra teigiama su pakankamai dideliais* x, *ir su* $\alpha > 0$ *tenkinama sąlyga*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xp(x)}{1 - F(x)} = \alpha;$$

b) $H = H_{2,\alpha}$, *tai* (3) *sąryšis bus teisingas intervale* $(-\infty; 0)$ *tada ir tik tada, kai tankio funkcija p(x) yra teigiama, ir su* $\alpha > 0$ *tenkinama sąlyga*

$$\lim_{x\to\omega(F)} \frac{(\omega(F) - x)p(x)}{1 - F(x)} = \alpha,$$

čia $\omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}$*;*

c) $H = H_{3,0}$, *tai* (3) *sąryšis bus teisingas su visais* x *tada ir tik tada, kai tenkinama sąlyga*

$$\lim_{x\to\omega(F)} \frac{p(x)\int_x^{\omega(F)}(1 - F(t))\,\mathrm{d}t}{(1 - F(x))^2} = 1.$$

Teoremos įrodymas pateiktas [1] darbe.

Pažymėkime

$$p_{W_n}(x) = nd_n p(c_n + d_n x)\bigl(1 - F(c_n + d_n x)\bigr)^{n-1},$$

čia $p_{W_n}(x)$ – atsitiktinio dydžio $(W_n - c_n)/d_n$ tankis.

Suformuluosime sąlygas, kurias turi tenkinti skirstinio funkcija F, kad tiesiškai normuoto minimumo tankis $p_{W_n}(x)$ konverguotų į ribinio skirstinio L tankį $L'(x)$, t.y.

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_n}(x) = L'(x). \tag{4}$$

2 TEOREMA. *Jei $F \in D(L))$ ir*

a) $L = L_{1,\gamma}$, *tai* (4) *sąryšis bus teisingas intervale* $(-\infty; 0)$ *tada ir tik tada, kai tankio funkcija* $p(-x)$ *yra teigiama, su pakankamai dideliais* x, *ir su* $\gamma > 0$ *tenkinama sąlyga*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xp(-x)}{F(-x)} = \gamma;$$

b) $L = L_{2,\gamma}$, *tai* (4) *sąryšis bus teisingas intervale* $(0;\infty)$ *tada ir tik tada, kai tankio funkcija* $p(-x)$ *yra teigiama, ir su* $\gamma > 0$ *tenkinama sąlyga*

$$\lim_{x\to\alpha(F)} \frac{(\alpha(F)-x)p(-x)}{F(-x)} = \gamma,$$

čia $\alpha(F) = \inf\{x: F(x) > 0\}$;

c) $L = L_{3,0}$, *tai* (4) *sąryšis bus teisingas su visais* x *tada ir tik tada, kai tenkinama sąlyga*

$$\lim_{x\to\alpha(F)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1-F(-x)}{p(-x)}\Big) = 0.$$

2 teoremos teiginys išplaukia iš 1 teoremos.

Sakykime, kad $\{N_n, n \geqslant 1\}$ – sveikareikšmių teigiamų atsitiktinių dydžių, nepriklausančių nuo$\{X_j, j \geqslant 1\}$, seka.

Apibrėžkime atsitiktinius dydžius

$$Z_{N_n} = \max(X_1,\ldots,X_{N_n}), \quad W_{N_n} = \min(X_1,\ldots,X_{N_n}).$$

Tarkime, kad tenkinama sąlyga

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{N_n}{n} < z\Big) = A(z), \tag{5}$$

visuose funkcijos $A(z)$ tolydumo taškuose. Kaip žinoma (žr.[3]), jei tenkinamos lygybės (1) ir (5), tai

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) = \Psi(x) = \int_0^\infty (H(x))^z \,\mathrm{d}A(z),$$

ir jei tenkinamos (2) ir (5), tai

$$\lim_{n\to\infty} P(W_{N_n} < c_n + d_n x) = \psi(x) = 1 - \int_0^\infty (1-L(x))^z \,\mathrm{d}A(z).$$

Šiame darbe tirsime atsitiktinių dydžių $(Z_{N_n} - a_n)/b_n$ ir $(W_{N_n} - c_n)/d_n$ tankių asimptotiką.

2. Pagrindinis rezultatas

Suformuluosime teoremas, kuriose gauti tiesiškai normuotų ekstremaliųjų reikšmių tankiai.

3 TEOREMA. *Tarkime, tenkinamos* (1) *ir* (3) *sąlygos. Jei atsitiktiniai dydžiai* $\{N_n\}$ *tenkina* (5) *sąlygą ir* $E(\frac{N_n}{n}) < \infty$, *tai*

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_{N_n}}(x) = \frac{H'(x)}{H(x)} \int_0^\infty z H^z(x)\,\mathrm{d}A(z) = \Psi'(x).$$

Įrodymas. Kadangi atsitiktiniai dydžiai $\{N_n, n \geqslant 1\}$ ir $\{X_j, j \geqslant 1\}$ yra nepriklausomi, tai, pritaikę pilnos tikimybės formulę, gauname

$$P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) = \sum_{j \geqslant 1} F^j(a_n + b_n x) P(N_n = j).$$

Diferencijuodami abi pastarosios lygybės puses gauname

$$\begin{aligned} p_{Z_{N_n}}(x) &= \sum_{j \geqslant 1} j b_n p(a_n + b_n x) F^{j-1}(a_n + b_n x) P(N_n = j) \\ &= \frac{n b_n p(a_n + b_n x) F^{n-1}(a_n + b_n x)}{F^n(a_n + b_n x)} \sum_{j \geqslant 1} \frac{j}{n} \big(F^n(a_n + b_n x)\big)^{j/n} P(N_n/n = j/n) \\ &= \frac{n b_n p(a_n + b_n x) F^{n-1}(a_n + b_n x)}{F^n(a_n + b_n x)} \int_0^\infty z \big(F^n(a_n + b_n x)\big)^z \, \mathrm{d}P(N_n/n < z). \quad (6) \end{aligned}$$

Įrodysime, kad

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty z \big(F^n(a_n + b_n x)\big)^z \, \mathrm{d}P(N_n/n < z) = \int_0^\infty z H^z(x) \, \mathrm{d}A(z).$$

Turime

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\infty z \big(F^n(a_n + b_n x)\big)^z \, \mathrm{d}P(N_n/n < z) - \int_0^\infty z H^z(x) \, \mathrm{d}A(z) \right| \\ &\quad \leqslant \left| \int_0^\infty z \big(F^n(a_n + b_n x)\big)^z \, \mathrm{d}P(N_n/n) - \int_0^\infty z H^z(x) \, \mathrm{d}P(N_n/n < z) \right| \\ &\qquad + \left| \int_0^\infty z H^z(x) \, \mathrm{d}P(N_n/n < z) - \int_0^\infty z H^z(x) \, \mathrm{d}A(z) \right|. \quad (7) \end{aligned}$$

Įvertinsime (7) nelygybės dešiniosios pusės antrąjį dėmenį. Kadangi funkcija $zH^z(x)$ yra tolydi ir aprėžta su visais $z > 0$, tai iš (5) sąlygos išplaukia, kad

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty z H^z(x) \, \mathrm{d}P(N_n/n < z) = \int_0^\infty z H^z(x) \, \mathrm{d}A(z). \quad (8)$$

Dabar įvertinsime (7) nelygybės dešiniosios pusės pirmąjį dėmenį. Kadangi tenkinama (1) lygybė, tai

$$\lim_{n \to \infty} \sup \big| F^n(a_n + b_n x) - H(x) \big| = 0.$$

Iš čia išplaukia, kad pakankamai dideliems n su visais $z > 0$ bet kokiam $\varepsilon > 0$ galios nelygybė

$$\max_z \big| \big(F^n(a_n + b_n x)\big)^z - H^z(x) \big| < \varepsilon.$$

Todėl

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^\infty z\big(F^n(a_n+b_nx)\big)^z \,\mathrm{d}P(N_n/n) - \int_0^\infty zH^z(x)\,\mathrm{d}P(N_n/n<z)\right| \\
&\quad\leqslant \int_0^\infty z\Big|\big(F^n(a_n+b_nx)\big)^z - H^z(x)\Big|\,\mathrm{d}P(N_n/n<z) \\
&\quad< \varepsilon\int_0^\infty z\,\mathrm{d}P(N_n/n<z) = \varepsilon E\Big(\frac{N_n}{n}\Big),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

t.y. šis dėmuo yra nykstamai mažas, kai $n\to\infty$, nes $E(\frac{N_n}{n})<\infty$.

Atsižvelgę į (7), (8) ir (9) gauname, kad

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty z\big(F^n(a_n+b_nx)\big)^z\,\mathrm{d}P(N_n/n<z) = \int_0^\infty zH^z(x)\,\mathrm{d}A(z). \tag{10}
$$

Atsižvelgę į teoremos sąlygas ir (10) lygybę, iš (6) gauname

$$
\lim_{n\to\infty} p_{Z_{N_n}}(x) = \frac{H'(x)}{H(x)}\int_0^\infty zH^z(x)\,\mathrm{d}A(z) = \Psi'(x).
$$

Teorema įrodyta.

4 TEOREMA. *Tarkime, tenkinamos* (2) *ir* (4) *sąlygos. Jei atsitiktiniai dydžiai* $\{N_n\}$ *tenkina* (5) *sąlygą ir* $E(\frac{N_n}{n})<\infty$, *tai*

$$
\lim_{n\to\infty} p_{W_{N_n}}(x) = \frac{L'(x)}{1-L(x)}\int_0^\infty z\big(1-L(x)\big)^z(x)\,\mathrm{d}A(z) = \psi'(x).
$$

Teoremos įrodymas analogiškas 3 teoremos įrodymui.

Literatūra

1. S.I. Resnick, *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*, Springer, New York (1987).
2. Я. Галамбош, *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*, Наука, Москва (1984).
3. Б.В. Гнеденко, Д.Б. Гнеденко, О распределении Лапласа и логистическом как предельных в теории вероятностей, *Сердика Болгарска Мат.*, **8**, 229–234 (1982).

SUMMARY

A. Jokimaitis, A. Aksomaitis. The transfer theorems for density of extreme values

In this paper the transfer theorems for density of minima and maxima of independent identically distributed random variables is proved.

Keywords: extreme values, local limit theorems, transfer theorem.