Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 110–114

Диагональный процесс фон Неймана как обобщенный предел Банаха и условное ожидание для наблюдаемых операторов с непрерывным спектром

Григорий МЕЛЬНИЧЕНКО (VPU)
e-mail: grimel@vpu.lt

1. Определения

Дано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{E}, m)$. Пусть подалгебра $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ и m_1 – сужение меры m на $\mathcal{E}_1$. Условное ожидание $f \in L^1(\mathcal{E}, m)$ относительно подалгебры $\mathcal{E}_1$ это единственная $h \in L^1(\mathcal{E}_1, m_1)$ такая, что $\int gh\,\mathrm{d}m_1 = \int gf\,\mathrm{d}m$ для всех $g \in L^1(\mathcal{E}_1, m_1)$. Поэтому условное ожидание – отображение $\Phi: L^1(\mathcal{E}, m) \to L^1(\mathcal{E}_1, m_1)$. Это свойство в некоммутативной теории вероятностей кладут в основу определения условного ожидания.

Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ – алгебры фон Неймана и $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, то условным ожиданием называют отображение $\Phi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}_1$, удовлетворяющее условиям:

1) $\Phi(B_1+B_2) = \Phi(B_1)+\Phi(B_2)$; 2) $\Phi(I) = I$; 3) $\Phi(B) \geqslant O$, если $B \geqslant O$;
4) $\Phi(A_1 B A_2) = A_1 \Phi(B) A_2$ для всех $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_1$ и $B \in \mathcal{A}$.

Условное ожидание точно, если из $\Phi(B) = 0$ и $B > 0$ следует $B = 0$.

Последовательность комплексных чисел $\{x_\tau\}$, индексированных направленным частично упорядоченным множеством $\mathcal{T}$, называется сходящейся к числу $x_0 = \lim x_\tau$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $\tau_\varepsilon \in \mathcal{T}$, что из соотношения $\tau_\varepsilon \prec \tau$ следует $|x_\tau - x_0| < \varepsilon$.

Лемма 1 [5]. *Пусть $x(\mathcal{T})$ – множество ограниченных последовательностей $\{x_\tau\}$ комплексных чисел, где индексы τ – элементы направленного частично упорядоченного множества $\mathcal{T}$. Тогда относительно операций $(x+y)_\tau = x_\tau + y_\tau$, $(ax)_\tau = ax_\tau$, множество $x(\mathcal{T})$ – линейное пространство, на котором можно определить такой линейный функционал – обобщенный предел Банаха (обозначим его $\operatorname{Lim} x_\tau$), что будут выполняться условия:*

1) $\operatorname{Lim}(ax_\tau + by_\tau) = a\operatorname{Lim} x_\tau + b\operatorname{Lim} y_\tau$;
2) *если* $x_\tau \geqslant 0$ *для всех* $\tau \in \mathcal{T}$, *то* $\operatorname{Lim} x_\tau \geqslant 0$;
3) *если предел* $\lim x_\tau$ *существует, то* $\lim x_\tau = \operatorname{Lim} x_\tau$;
4) $|\operatorname{Lim} x_\tau| < \mathrm{c}$, *где* $c = \sup |x_\tau|$.

Семейство подпространств $\mathcal{F}$ гильбертова пространства $\mathbf{H}$ – гнездо, если для любой пары подпространств $\mathbf{M}, \mathbf{L} \in \mathcal{F}$ либо $\mathbf{M} \subset \mathbf{L}$, либо $\mathbf{L} \subset \mathbf{M}$.

Гнездо $\mathcal{F}$ полно, если $\mathbf{O}$, $\mathbf{H} \subset \mathcal{F}$ и для любого подмножества $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ подпространства $\bigcap\limits_{\mathbf{L}\in\mathcal{K}} L$, $\bigcup\limits_{\mathbf{L}\in\mathcal{K}} \mathbf{L}$ принадлежат $\mathcal{F}$. Алгебра всех операторов $\mathcal{N}$, которые оставляют инвариантными каждое подпространство полного гнезда $\mathcal{F}$, называется гнездовой [7], а алгебра $\mathcal{D} = \mathcal{N} \cap \mathcal{N}^*$ – диагональной.

Если каждому подпространству полного гнезда $\mathcal{F}$ сопоставить ортопроектор, то получим упорядоченную цепочку проекторов $\mathcal{L} = \{P\}$. Пару проекторов (P_-, P_+) $(P_- < P_+)$, принадлежащих цепочке $\mathcal{L} = \{P\}$, называют разрывом цепочки, если для любого $P \in \mathcal{L}$ либо $P < P_-$, либо $P_+ < P$. Цепочку без разрывов называют непрерывной [8].

Пусть $\mathcal{L} = \{P\}$ – цепочка проекторов, тогда множество проекторов $O = P_0 < P_1 < \ldots < P_n = I$ называют разбиением $\tau = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ цепочки. Разбиение τ называют продолжением разбиения τ_0 $(\tau_0 \prec \tau)$, если τ содержит проекторы τ_0. Относительно введенного отношения порядка множество всех разбиений – направленное частично упорядоченное множество [8].

Пусть $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ – алгебра всех ограниченных операторов гильбертова пространства $\mathbf{H}$. Для любого оператора $B \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ и для любого разбиения $\tau = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ определим операторные суммы:

$$F_\tau(B) = \sum_{i=1}^{n} (P_i - P_{i-1}) B (P_i - P_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i B \Delta P_i. \tag{1}$$

Операторные суммы (1) сходятся к пределу – оператору B_0 (обозначаемому $B_0 = \int\limits_{\mathcal{L}} \mathrm{d}PB\,\mathrm{d}P$) в равномерной операторной топологии, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение τ_ε, что из соотношения $\tau_\varepsilon \prec \tau$ следует $||F_\tau(B) - B_0|| \leqslant \varepsilon$ [8]. Аналогично определяют пределы операторных сумм (1) в сильной и слабой операторных топологиях.

2. Результаты

Цель статьи – определить условное ожидание как отображение Φ алгебры $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ на подалгебру $\mathcal{A}$, порожденную наблюдаемым оператором A с непрерывным спектром. Если у оператора A – чисто дискретный спектр, то $A = \sum \lambda_i \Delta P_i$, а отображение $\Phi(B) = \sum \Delta P_i B \Delta P_i$ – единственное условное ожидание.

Фон Нейман [1], (см. также [2]) ввел диагональный процесс, использующий операторные суммы (1) для выделения диагональной части линейного оператора, но без использования обобщенного предела Банаха. Диагональный процесс фон Неймана является условным ожиданием и построен, когда диагональная алгебра $\mathcal{D} = \mathcal{N} \cap \mathcal{N}^*$ – максимальная абелева алгебра. В этом случае алгебру $\mathcal{N}$ называют треугольной.

Обобщим конструкцию диагонального процесса фон Неймана, используя обобщенный предел Банаха, что позволит построить условное ожидание для наблюдаемых операторов с непрерывным спектром. Условное ожидание как обобщенный предел Банаха приведено без доказательства в нашей статье [6].

В [3], [4] для наблюдаемого оператора с непрерывным спектром дана конструкция условного ожидания с применением инвариантного среднего, определенного на группе унитарных операторов, коммутирующих с наблюдаемым оператором. Эта конструкция не столь естественна, как предлагаемая нами.

Для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ и для любых $f, g \in \mathbf{H}$ определим последовательности комплексных чисел

$$x_\tau(B, f, g) = \langle \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i B \Delta P_i f, g \rangle, \tag{2}$$

где индексы τ – разбиения цепочки проекторов $\mathcal{L} = \{P\}$ полного гнезда. Ясно, что последовательности $x_\tau(B, f, g)$ образуют линейное пространство относительно $B \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ и $f, g \in \mathbf{H}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{N}$ – гнездовая алгебра и $\mathcal{D} = \mathcal{N} \cap \mathcal{N}^*$ – ее диагональ. Тогда существует условное ожидание $\Phi\colon \mathcal{B}(\mathbf{H}) \to \mathcal{D}$, определяемое для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ соотношением $\langle \Phi(B) f, g \rangle = \operatorname{Lim} \langle \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i B \Delta P_i f, g \rangle$, где* Lim *– обобщенный предел Банаха на линейном пространстве ограниченных последовательностей* (2).

Если существуют пределы операторных сумм (1) *в равномерной, сильной или слабой операторных топологиях, то $\Phi(B) = \int\limits_{\mathcal{L}} \mathrm{d}PB\,\mathrm{d}P$.*

Доказательство. Докажем, что последовательности (2) ограничены. Так как векторы $\Delta P_i B \Delta P_i f$ ортогональны, тогда (теорема Пифагора) $||\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta P_i B \Delta P_i f||^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} ||\Delta P_i B \Delta P_i f||^2$. Отсюда и из неравенств $||\Delta P_i B \Delta P_i f|| \leqslant ||\Delta P_i B|| ||\Delta P_i f||, ||\Delta P_i|| \leqslant 1$ следует

$$||\sum_{i=1}^{n} \Delta P_i B \Delta P_i f||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||\Delta P_i B \Delta P_i f||^2 \leqslant ||B||^2 \sum_{i=1}^{n} ||\Delta P_i f||^2.$$

Векторы $\Delta P_i f$ ортогональны и $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta P_i = I$, тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} ||\Delta P_i f||^2 = ||f||^2$. Поэтому $||\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta P_i B \Delta P_i f||^2 \leqslant ||B||^2 || \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta P_i f||^2 = ||B||^2 ||f||^2$. Отсюда получаем $\|\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta P_i B\Delta P_i f\| \leqslant \|B\|\|f\|$. Окончательно

$$|x_\tau(B,f,g)| = |\langle\sum_{i=1}^{n}\Delta P_i B\Delta P_i f, g\rangle| \leqslant \|B\|\|f\|\|g\|, \qquad (3)$$

т.е. последовательности (2) ограничены.

По лемме 1 на ограниченных последовательностях (2) можно определить обобщенный предел Банаха $\operatorname{Lim} x_\tau(B,f,g)$. По условию 1 леммы 1 $\operatorname{Lim} x_\tau(B,f_1+f_2,g) = \operatorname{Lim} x_\tau(B,f_1,g) + \operatorname{Lim} x_\tau(B,f_2,g)$, т.е. линейность по f. Аналогично получаем линейность по g. Из условия 4 леммы 1 и (3) следует $|\operatorname{Lim} x_\tau(B,f,g)| \leqslant \sup|x_\tau(B,f,g)| \leqslant \|B\|\|f\|\|g\|$. Значит, $\operatorname{Lim} x_\tau(B,f,g)$ – ограниченный билинейный функционал. Тогда по теореме об общем виде билинейного функционала $\operatorname{Lim} x_\tau(B,f,g) = \langle Cf,g\rangle$, где $C \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$.

Определим отображение $\Phi(B) = C$, где $\Phi(B)$ зададим формулой

$$\langle\Phi(B)f,g\rangle = \operatorname{Lim}\langle\sum_{i=1}^{n}\Delta P_i B\Delta P_i f, g\rangle.$$

Если τ – любое разбиение цепочки $\mathcal{L} = \{P\}$ и P – ее любой проектор, тогда существует такое число k, что $P_{k-1} \leqslant P \leqslant P_k$. Имеем $\Delta P_i P = P\Delta P_i = \Delta P_i$ для $i < k-1$, $\Delta P_i P = P\Delta P_i = P_{k-1} - P$ для $k-1 \leqslant i \leqslant k$ и $\Delta P_i P = P\Delta P_i = O$ для $i > k$. Положим $\Delta P_k = P_{k-1} - P$, тогда

$$x_\tau(B,Pf,g) = \langle\sum_{i=1}^{n}\Delta P_i B\Delta P_i Pf, g\rangle = \langle\sum_{i=1}^{k}\Delta P_i B\Delta P_i f, g\rangle,$$
$$x_\tau(B,f,Pg) = \langle\sum_{i=1}^{n}\Delta P_i B\Delta P_i f, Pg\rangle = \langle\sum_{i=1}^{k}\Delta P_i B\Delta P_i f, g\rangle.$$

Отсюда $x_\tau(B,Pf,g) = x_\tau(B,f,Pg)$ для любого разбиения τ. Тогда $\operatorname{Lim} x_\tau(B,Pf,g) = \operatorname{Lim} x_\tau(B,f,Pg)$. Поэтому $\langle\Phi(B)Pf,g\rangle = \langle P\Phi(B)f,g\rangle$. Это доказывает, что $P\Phi(B) = \Phi(B)P$ для любого $P \in \mathcal{L}$, т.е. $\Phi(B) \in \mathcal{D}$.

Линейность отображения Φ следует из условия 1 леммы 1, а доказательство сохранения единицы $\Phi(I) = I$ очевидно.

Пусть $B \geqslant O$, тогда $\langle\Delta P_i B\Delta P_i f, f\rangle = \langle B\Delta P_i f, \Delta P_i f\rangle \geqslant 0$ для любого $f \in \mathbf{H}$. Отсюда $x_\tau(B,f,f) = \langle\sum_{i=1}^{n}\Delta P_i B\Delta P_i f, f\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle B\Delta P_i f, \Delta P_i f\rangle \geqslant 0$. Тогда из условия 2 леммы 1 следует $\Phi(B) \geqslant O$, если $B \geqslant O$.

Если $A_1, A_2 \in \mathcal{D}$, то $\Delta P_i A_1 = A_1\Delta P_i$ и $\Delta P_i A_2 = A_2\Delta P_i$. Поэтому

$$x_\tau(A_1BA_2,f,g) = \langle\sum_{i=1}^{n}\Delta P_i A_1BA_2\Delta P_i f, g\rangle = \langle A_1\sum_{i=1}^{n}\Delta P_i B\Delta P_i A_2 f, g\rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i B \Delta P_i A_2 f, A_1^* g \rangle = x_\tau(B, A_2 f, A_1^* g).$$

Поэтому для всех $f, g \in \mathbf{H}$ имеем $\operatorname{Lim} x_\tau(A_1 B A_2, f, g) = \operatorname{Lim} x_\tau(B, A_2 f, A_1^* g)$. Отсюда следует, что $\Phi(A_1 B A_2) = A_1 \Phi(B) A_2$.

Доказательство формулы $\int_{\mathcal{L}} \mathrm{d}PB\mathrm{d}P$ следует из условия 3 леммы 1.

Теорема 2. *Пусть A – самосопряженный оператор, быть может неограниченный, имеющий участки непрерывного спектра, тогда существует условное ожидание $\Phi\colon \mathcal{B}(\mathbf{H}) \to \mathcal{U}'$, где $\mathcal{U}'$ – коммутатор алгебры $\mathcal{U}$, порожденной разложением единицы оператора A.*

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{N}$ – гнездовая алгебра и $\mathcal{R}$ – ее радикал. Если $B \in \mathcal{R}$, то $\Phi(B) = O$.*

Теорема 4. *Если оператор B компактен и для любого разрыва (P_-, P_+) цепочки $\mathcal{L} = \{P\}$ имеем $(P_+ - P_-)B(P_+ - P_-) = 0$, то $\Phi(B) = O$.*

Замечание. Из теоремы 4 следует, что построенное условное ожидание не точно для непрерывной цепочки, поскольку в этом случае $\Phi(B) = O$ для всех компактных операторов, среди которых будут и положительные операторы.

Литература

[1] von J. Neumann, On rings of operators III, *Ann. of Math.*, **41**, 94–161 (1940).

[2] R.V. Kadison, I.M. Singer, Extensions of pure state, *Ann. of Math.*, **81**, 383–400 (1959).

[3] M.D. Srinivas, Collapse postulate for observable with continuous spectra, *Commun. Math. Phys.*, **71**, 131–158 (1980).

[4] H. Feintuch, R. Saeks, C. Neil, A new performance measure for stochastic optimization in Hilbert space, *Math. Systems Theory*, **15**, 35–54 (1981).

[5] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer–Verlag, Heidelberg (1965).

[6] Г.А. Мельниченко, Чистые состояния и гнездовые алгебры, *Успехи матем. наук*, **39**, 169–170 (1984).

[7] I.R. Ringrose, On some algebras of operators. *Proc. London Math. Soc.*, **3**, 463–478 (1961).

[8] М.С. Бродский, *Треугольные и жордановы представления линейных операторов*, Наука, Москва (1969).

Von Neumanno diagonalinis procesas kaip apibendrintoji Banacho riba ir sąlyginis vidurkis stebimiesiems operatoriams su tolydžiuoju spektru

G. Melničenko

Pateikta sąlyginio vidurkio konstrukcija kaip Banacho apibendrintoji riba stebimiesiems operatoriams su tolydžiuoju spektru. Tokia konstrukcija gali būti naudinga nekomutatyviųjų tikimybių teorijoje ir atsitiktinėje optimizacijoje.