LMD mokslo darbai, 475–477
1998, Vilnius

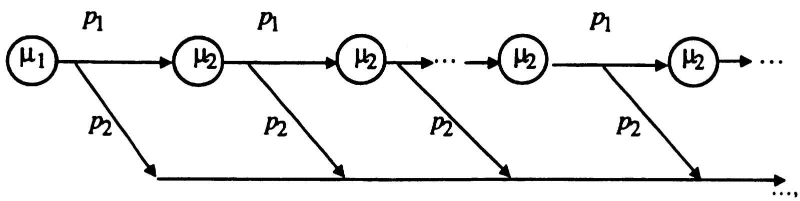
Teigiamo atsitiktinio dydžio skirstinio aproksimavimas eksponentinių skirstinių mišiniu

E. Valakevičius (KTU)

Eksponentinis skirstinys yra labai svarbus modeliuojant sistemas, aprašomas stochastiniu procesu su tolydžiu laiku ir skaičia būsenų aibe. Tikimybė, kad operacijos trukmė, turinti skirstinį su tankio funkcija $\lambda e^{-\lambda t}$ sistemoje pasibaigs laiko intervale δt yra lygi $\lambda\delta t + o(\delta t)$. Jei visos operacijų trukmės turi eksponentinius skirstinius, tai stochastinis procesas vykstantis sistemoje yra Markovo. Pavyzdžiui, sistemose su eilėmis operacijų trukmės yra paraiškos aptarnavimas ir laiko intervalai tarp dviejų gretimų paraiškų, atvykstančių į sistemą. Tokiu atveju gali būti pritaikyti standartiniai metodai gauti tiesinių diferencialinių lygčių sistemą, aprašančia stochastinį procesą arba algebrinių tiesinių lygčių sistemą apskaičiuoti sistemos stacionarioms tikimybėms. Iš šių tikimybių galima gauti įvairias sistemos funkcionavimo charakteristikas.

Straipsnyje siūloma metodika, kaip pritaikyti anksčiau paminėtus metodus neeksponentiniams skirstiniams. Labiausiai paplitęs metodas [1, 2, 3] yra laikyti, kad neeksponentinė operacijos trukmė turi k fazių su tikimybine perėjimo iš vienos fazės į kitą struktūra. Kiekvienoje fazėje praleistas laikas yra nepriklausomai pasiskirstęs nuo kitų su tikimybių tankio funkcija $\mu_i \cdot e^{-\mu_i t}, i=\overline{1,k}$. Bendra operacijos trukmė susideda iš tam tikros sumos eksponentiškai pasiskirsčiusių trukmių. Tada atsitiktinis procesas, vykstantis sistemoje, bus Markovo, jei sistemos būsenos aprašyme yra koordinatė, nurodanti kurią fazę yra pasiekusi operacijos trukmė. Atsitiktinės trukmės skaidymas į fazes yra grynai matematinė priemonė ir nebūtinai privalo turėti fizikinę prasmę.

Aproksimuokime teigiamo atsitiktinio dydžio ξ skirstinį $G(x)$ su žinomais pradiniais momentais m_k, $k = 1, 2, 3,$ skaičiu eksponentinių skirstinių mišiniu



čia $p_1 + p_2 = 1$. Nubrėžtos struktūros atsitiktinės operacijos X trukmę analitiškai galime aprašyti taip:

$$X = \begin{cases} X_1 & \text{su tikimybe } p_2; \\ X_1 + X_2 & \text{su tikimybe } p_1 p_2; \\ \dots & \\ X_1 + \overbrace{X_2 + X_2 + \ldots + X_2}^{n-1} & \text{su tikimybe } p_1^{n-1} \cdot p_2; \\ \dots & \end{cases}$$

X_i yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai su tankio funkcijomis $\mu_i \cdot e^{-\mu_i t}, i = \overline{1,2}$. Atsitiktinis dydis X lygus nepriklausomų eksponentinių atsitiktinių dydžių sumai su atsitiktinių dėmenų skaičiumi, pasiskirsčiusiu pagal geometrinį skirstinį. Ieškosime atsitiktinio dydžio X tankio funkcijos.

Dydžio X tankio funkcijos Laplaso transformacija lygi

$$F(s) = E\left(e^{-sX}\right) = e^{-sX_1} p_2 + \sum_{i=2}^{\infty} p_1^{i-1} p_2 \cdot Ee^{-s\left(X_1 + \sum_{l=1}^{i-1} X_2\right)}$$

$$= \frac{\mu_1 p_2}{s + \mu_1} + \sum_{i=2}^{\infty} p_1^{i-1} p_2 \frac{\mu_1}{s + \mu_1} \cdot \left(\frac{\mu_2}{s + \mu_2}\right)^{i-1}$$

$$= p_2 \frac{\mu_1}{s + \mu_1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_2 p_1}{s + \mu_2}\right)^{i-1} = \frac{p_2 \mu_1 (s + \mu_2)}{(s + \mu_1)(s + \mu_2 p_2)},$$

nes $\left|\frac{\mu_2 p_1}{s + \mu_2}\right| < 1.$

Atlikę atvirkštinę Laplaso transformaciją, gausime atsitiktinio dydžio X tankio funkciją:

$$f(x) = L^{-1}\{F(s)\} = p_2 \mu_1 \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 p_2 - \mu_1} e^{-\mu_1 t} - \frac{\mu_2 p_1}{\mu_2 p_1 - \mu_1} e^{-\mu_2 p_2 t}\right),$$

$$p_1 + p_2 = 1.$$

Tankio funkcijos $f(x)$ pradiniai momentai yra

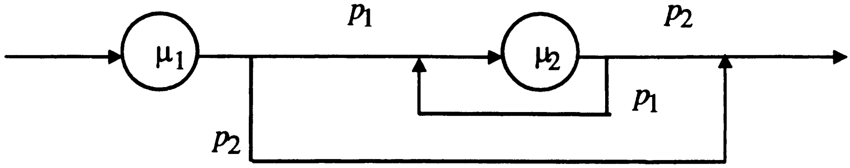
$$\nu_k = p_2 \mu_1 \cdot \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 p_2 - \mu_1} \cdot \frac{k!}{\mu_1^{k+1}} - \frac{\mu_2 p_2}{\mu_2 p_2 - \mu_1} \cdot \frac{k!}{(\mu_2 p_2)^{k+1}}\right), \quad k = 1,2,3,\ldots$$

Sulyginę atitinkamus aproksimuojamo skirstinio tris pradinius momentus m_k, $k = 1, 2, 3$ su aproksimuojančio skirstinio pradiniais momentais ν_k, $k = 1,2,3$, gauname netiesinių lygčių sistemą

$$p_2\mu_1 \cdot \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 p_2 - \mu_1} \cdot \frac{k!}{\mu_1^{k+1}} - \frac{\mu_2 p_2}{\mu_2 p_2 - \mu_1} \cdot \frac{k!}{(\mu_2 p_2)^{k+1}} \right) = m_k, \quad k = 1,2,3$$

nežinomiems tankio funkcijos $f(x)$ parametrams μ_1, μ_2, p_1 apskaičiuoti.

Atsitiktinę operacijos trukmę X galima schematiškai atvaizduoti žymiai paprasčiau tokiu būdu



Aprašytą skirstinį lengva apibendrinti, kai pirmosios k fazių turi eksponentinius skirstinius su skirtingais parametrais μ_i, $i = \overline{1,k}$, o likusios fazės – vienodus parametrus μ_j, $j = k+1, k+2, \ldots$.

Gautas skirstinys yra labai naudingas praktiniuose taikymuose modeliuojant stochastines sistemas, nes jo dėka galima nemarkoviškus procesus aproksimuoti markoviškais procesais, kai turime reikalą su neeksponentiniais skirstiniais. Tankio funkcija $f(x)$ yra pakankamai sudėtinga. Jos praktiškai negalima panaudoti sudarant stochastinių sistemų analizinius modelius. Tačiau schematinis skirstinio atvaizdavimas leidžia efektyviai jį pritaikyti, kuriant skaitmeninius stochastinių sistemų modelius. Tam yra naudojamas programų paketas [4], skirtas automatizuotam sistemų, aprašomų Markovo procesu su skaičia būsenų erdve ir tolydžiu laiku, skaitmeninių modelių sudarymui.

LITERATŪRA

[1] Cox D.R. A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes // *Proc. Camb. Phil. Soc.*, – 1955. – Nr. 51. – P.313 – 319.

[2] Ryzhikov, Yu.I, Khomenko, A.D. An iterative method for analysis of multi-chanel queuing system with general service time distribution // *Problems of Control and Information Theory*. – 1980. – Vol. 9, N2. – P.203 – 213.

[3] Henk C. Tijms. *Stochastic models: an algorithmic approach*, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[4] H. Pranevičius, E. Valakevičius. Numerical models of systems specified by markovian processes. Kaunas, Technologija, 1996.

Approximation of a positive random variable distribution by the mixture of exponential distributions

E. Valakevičius

In the paper is proposed a method how to approximate the model of non-markovian stochastic system by markovian one with a countable space of states and continuous time.