LMD konf. darbai, 330–335
1997, Vilnius

Apie stochastinių sistemų skaitmeninių modelių sudarymą

E. Valakevičius (KTU)

Nagrinėkime stochastinę sistemą, kurios būseną laiko momentu t apibrėžkime atsitiktiniu vektoriumi $Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_m(t))$, čia $Y_i(t)$, $i = \overline{1, m}$ yra diskretūs atsitiktiniai dydžiai. Laikysime, kad sistema gali keisti būseną bet kuriuo laiko momentu. Tokioms sistemoms tirti labiausiai tinka Markovo procesų (grandinių) modeliai, jei laiko tarpai tarp dviejų nuoseklių būsenų pasikeitimų pasiskirstę eksponentiškai. Daugelio realių sistemų (socialinių, ekonominių, ekologinių, techninių ir kt.) evoliucijos procesą galima modeliuoti kaip Markovo grandinę $\{Y(t),\ t \geqslant 0\}$ su tolydžiu laiku ir skaičia būsenų erdve, o atitinkami modeliai dažnai vadinami markoviškais sistemų modeliais. Pažymėkime galimų būsenų erdvę $B = \{S_j,\ j \geqslant 1\}$, čia $S_j = (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{mj})$, o j-osios būsenos tikimybę – $P\{Y = S_j\} = \pi_j$, $j \geqslant 1$. Stacionariosios (ribinės) būsenų tikimybės randamos iš lygčių sistemos

$$v_j \pi_j = \sum_{k \neq j} \pi_k \lambda_{kj}, \qquad S_j \in B$$

su normavimo sąlyga $\sum_{S_j \in B} \pi_j = 1$, čia λ_{kj} – perėjimo tarp būsenų intensyvumai ir $v_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$, $S_i \in B$. Žinant būsenų tikimybes galima apskaičiuoti įvairias sistemos elgesio tikimybines charakteristikas. Problema iškyla, kai bent vieno iš įvykių srauto, keičiančio sistemos būseną, laikas tarp gretimų įvykių turi neeksponentinį skirstinį. Šiame straipsnyje siūlomas metodas, kaip aproksimuoti nemarkovišką sistemos modelį markovišku modeliu. Tam tikslui siūloma neeksponentiškai pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio skirstinį aproksimuoti eksponentinių skirstinių mišiniu.

Formaliai sistemą galima atvaizduoti santykiu $S = \{X, R\}$, čia $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ – sistemos įėjimo elementų aibė; R – aprašo sistemos elgesio dėsningumus, apribojimus ir valdymą. Norint aprašyti sistemą, reikia žinoti įėjimo-išėjimo mechanizmą. Kitaip sakant, duotiems X ir R reikia mokėti surasti išėjimo vektorių $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$, t.y. žinoti atvaizdavimą f: $\{X, R \to Y\}$. Šis santykis rodo, kad duotiems $\{X, R\}$ galima apskaičiuoti Y, jei žinomas atvaizdavimas f. Taip galima apibrėžti determinuotas ir stochastines sistemas. Determinuotos sistemos charakterizuojamos tuo, kad duotiems įėjimo parametrams X, sąlygų aibei R ir atvaizdavimui f, išėjimo parametrų vektorius Y realizuojamas su tikimybe 1. Stochastinėse sistemose išėjimo vektorius Y yra atsitiktinis ir realizuojamas su tikimybe π_j:

$$P\big(Y = (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{mj}) \mid X, R, f\big) = \pi_j, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

jei atsitiktinis vektorius Y įgyja diskrečias reikšmes.

Sakykime, kad stochastinė sistema funkcionuoja stacionariame režime, t.y. jos modelio būsenų stacionariosios tikimybės, praėjus ilgam laiko tarpui nepriklauso nuo laiko. Tegul sistemos būsenos kitimą įtakoja n įvykių srautų. Kiekvieno srauto laiko tarpas tarp gretimų įvykių atsitiktinis dydis X_i, turintis skirstinį $G_i(x)$, $i = \overline{1,n}$. Tada įėjimo į sistemą elementų aibė $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sudaryta iš atsitiktinių dydžių. Pavyzdžiui, vienakanalėje sistemoje su eile aibės X elementais gali būti: paraiškos aptarnavimo laikas ir laiko tarpas tarp dviejų gretimų paraiškų, atėjusių į sistemą. Sistemos išėjimu laikysime sistemos būseną $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$. Markovo procesas (grandinė) pasižymi savybe, kad neturi „atminties", t.y. ateitis priklauso tik nuo dabarties. Nemarkoviškas procesas turi „atmintį" ir reikia „atsiminti" kiekvieno įvykio trukmę iki jo pasirodymo. Tarkime, stebime būseną Y su galima įvykių aibe $E(Y)$, susieta su šia būsena. Sakykime, laikas iki įvykio $e_j \in E(Y)$ pasirodymo yra atsitiktinis dydis Z_j. Tada įvykio e_j tikimybė lygi tikimybei, kad laikas iki jo pasirodymo yra mažiausias tarp visų įvykių $E(Y)$:

$$P(e_j) = P\Big[Z_j = \min_{e_i \in E(Y)} \{Z_i\}\Big].$$

Norint apskaičiuoti šią tikimybę, reikia turėti informaciją apie atsitiktinius dydžius Z_j. Tik Markovo proceso atveju, kuris „neturi atminties", tikimybės apskaičiuojamos pagal formulę:

$$P(e_j) = \frac{\lambda_j}{\Lambda(Y)};$$

čia λ_j yra įvykio e_j pasirodymo intensyvumas ir

$$\Lambda(Y) = \sum_{e_i \in E(Y)} \lambda_i.$$

Šiuo atveju informacija apie dydžius Z_j nereikalinga.

Vienas iš būdų nemarkovišką procesą padaryti markovišku yra aproksimuoti nepuasoninius įvykių srautus eksponentinių įvykių srautų kombinacija [1]. Tarkime, turime Puasono įvykių seką $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Apibrėžkime naują įvykį e, kuris įvyksta, kai įvyksta visi arba kai kurie iš įvykių $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Tokiu būdu, mes apibrėžiame naują įvykį e su trukme, priklausančia nuo k ir kuris pasirodo po tam tikros įvykių sekos e_i, $i = 1, \ldots, k$. Įvykiai e_i parenkami atsitiktinai su tikimybe p_i. Keičiant atitinkamus parametrus, galima generuoti įvykius, turinčius įvairias trukmes. Taip sukonstruotas procesas, tarsi, turi „atmintį" ir tuo pačiu išlaiko markoviškumo savybę.

Modeliuojant nemarkoviškas stochastines sistemas (pvz., sistemas su eilėmis), dažnai naudinga teigiamo atsitiktinio dydžio skirstinius aproksimuoti eksponentinių skirstinių mišiniu, kad tiriamos sistemos evoliuciją galima būtų aprašyti Markovo procesu su skaičia būsenų erdve ir tolydžiu laiku. Mišinio tankio funkcijos Laplaso transformacija gaunama panaudojus blokines diagramas su perdavimo funkcijomis. Sakykime, turime m nesikertančių aibių

$$A_k = \left\{p_i^{(k)}, \mu_i^{(k)} e^{-\mu_i^{(k)} x},\ i = \overline{1, n_k}\right\}, \qquad \sum_{i=1}^{n_k} p_i^{(k)} = 1, \quad k = \overline{1, l},$$

čia $\mu_i^{(k)} e^{-\mu_i^{(k)} x}$ – eksponentinio skirstinio tankio funkcija. Iš aibių A_k, $k = \overline{1, l}$ elementų galima sukonstruoti norimos struktūros eksponentinių fazių skirstinį. Jeigu šio skirstinio blokinę diagramą (eksponentinių skirstinių mišinį) paveiksime impulsine funkcija

$$\delta(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x},$$

$$u(x - x_0) = \begin{cases} 1, & x > x_0, \\ 0, & x \leqslant x_0, \end{cases}$$

ir rasime tos struktūros Laplaso transformaciją, tai išėjime gausime mišinio skirstinio tankio funkcijos atvaizdį *F(s)*. Prilyginę gauto skirstinio pradinius momentus

$$\lambda_i = (-1)^i F^{(i)}(s)\big|_{s=0}, \quad i = 1, 2, \ldots, j,$$

bendrojo tipo skirstinio $G(x)$ pradiniams momentams v_i, gausime netiesinių algebrinių lygčių sistemą nežinomiems mišinio skirstinio parametrams apskaičiuoti. Čia j lygus nežinomų parametrų skaičiui. Sprendžiant lygčių sistemą, kartais gaunamos kompleksinės parametrų reikšmės, todėl ir apskaičiuotos sistemos būsenų tikimybės yra kompleksiniai skaičiai, tačiau sistemos tikimybinės darbo charakteristikos yra realūs skaičiai. Eksponentinių fazių metodas efektyviai pritaikomas panaudojant stochastinių sistemų skaitmeninių modelių automatizuoto sudarymo programinę įrangą [2].

Sakykime $G(x)$ yra atsitiktinio dydžio X skirstinys, kuris aprašo tam tikrą nepuasoninį (neeksponentinį) įvykių srautą, su vidurkiu $MX = m$ ir dispersija $DX = \sigma^2$. Šį skirstinį galima aproksimuoti atsitiktinio dydžio

$$X = \begin{cases} X_1 + X_2 & \text{su tikimybe } p, \\ X_1 & \text{su tikimybe } 1 - p, \end{cases}$$

skirstiniu. X_1 ir X_2 nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys eksponentinius skirstinius atitinkamai su parametrais μ_1 ir μ_2. Skirstinys turi pavidalą

$$C_2(x) = 1 - e^{-\mu_1} + \frac{p\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\left(e^{-\mu_2 x} - e^{-\mu_1 x}\right),$$

čia

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{(v^2+1)m} \pm \frac{\sqrt{2v^2+1}}{(v^2+1)m} \cdot i, \quad p = 1, \ i^2 = -1, \ v^2 = \frac{\sigma^2}{m^2}, \quad \text{jei } v^2 < \frac{1}{2}$$

ir

$$\mu_1 = \frac{2}{m}, \quad \mu_2 = \frac{1}{mv^2}, \quad p = \frac{1}{2v^2}, \quad \text{jei } v^2 \geqslant \frac{1}{2}.$$

Aproksimavę neeksponentinių atsitiktinių dydžių skirstinius eksponentiniais, mes turėsime kitą sistemą, izomorfinę ribota prasme pradinei sistemai. Taip išplečiama stochastinių sistemų modelių, kuriuos galima ištirti pritaikius Markovo procesų teoriją, klasė.

Stochastinės sistemos skaitmeninis modelis sudaromas pritaikius sistemų, aprašomų Markovo procesais su tolydžiu laiku ir skaičia būsenų erdve, automatizuoto skaitmeninių modelių sudarymo metodiką [2]. Tam reikia apibrėžti sistemos būsenos vektorių $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, įvykių aibę $E = (e_1, e_2, \dots, e_k)$, kurie gali įvykti sistemoje, nurodyti intensyvumus su kuriais sistema pereina iš vienos būsenos į kitą ir nurodyti pradinę sistemos būseną. Sistemos funkcionavimas aprašomas specialiai tam sukurtoje įvykių kalboje. Šio aprašymo pagrindu automatizuotai generuojama visų galimų sistemos būsenų aibė, perėjimo intensyvumai tarp būsenų, o po to apskaičiuojamos Markovo proceso stacionarios tikimybės bei sistemos funkcionavimo tikimybinės charakteristikos.

Aprašytą metodiką pritaikykime kuriant nemarkoviškos prioritetinės aptarnavimo sistemos skaitmeninį modelį.

Nagrinėkime sistemą $S = \{X, R\}$ su atvaizdavimu

$$
\begin{aligned}
&f\colon \{X, R\} \longrightarrow Y,\\
&X = \left(X_{1j}, X_{2j},\ j = \overline{1,k}\right),\\
&R = \left(NPRP,\ Q \leqslant l_j,\ j = \overline{1,k};\ FCFS\right),\\
&Y = \left(Y_1, \dots, Y_{k+2}\right),
\end{aligned}
$$

čia atsitiktiniai dydžiai X_{1j} charakterizuoja ateinančių paraiškų srautą, o X_{2j} – atitinkamai aptarnavimo laiką.

Ši sistema yra vienakanalė aptarnavimo sistema su santykiniais prioritetais (NPRP – prioritetas mažėja, mažėjant eilės numeriui) ir ribotu vietų skaičiumi l_j eilėse Q_j. Ateinančių paraiškų srautai yra puasoniniai $M(\lambda_j)$ su intensyvumais λ_j, $j = \overline{1,k}$, o atitinkamų srautų aptarnavimo laikai turi išsigimusius skirstinius

$$
D_j(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant d_j,\\ 1, & x > d_j. \end{cases}
$$

Aptarnavimo strategija (FCFS): pirmas atėjo – pirmą aptarnavo. Tarkime, kad sistema gali turėti N būsenų. Apskaičiuosime sistemos funkcionavimo charakteristikas:

1) sistemos būsenų stacionarias tikimybes π_i, $i = \overline{1, N}$;

2) $L_q^{(j)}$ – vidutinį paraiškų skaičių j-oje eilėje Q_j;

3) $W_q^{(j)}$ – vidutinį laukimo laiką j-oje eilėje.

Aproksimuokime skirstinius $D_j(x)$ dviejų eksponentinių skirstinių mišiniu (dviejų fazių metodas)

$$
C_2^{(j)}(x) = 1 - e^{\mu_1^{(j)}x} + \frac{p\mu_1^{(j)}}{\mu_2^{(j)} - \mu_1^{(j)}}\left(e^{\mu_2^{(j)}x} - e^{\mu_1^{(j)}x}\right);
$$

čia

$$
p = 1; \qquad \mu_1^{(j)} = \frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_i}\cdot i; \quad \mu_2^{(j)} = \frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_i}\cdot i, \quad i^2 = -1.
$$

Tada sistemos evoliuciją galima aprašyti Markovo procesu su tolydžiu laiku ir skaičia būsenų erdve.

Sistemos įvykių aibė

$$E = \{e_{1j},\ j = \overline{1,k},\ e_2, e_3\},$$

čia

e_{1j} – atėjo j-ojo srauto paraiška, $j = \overline{1,k}$;
e_2 – aptarnauta paraiška pirmoje fazėje;
e_3 – aptarnauta paraiška antroje fazėje.

Sistemos būsenos vektorius

$$Y = \{Y_j,\ j = \overline{1,k},\ Y_{k+1}, Y_{k+2}\},$$

čia

Y_j – j-ojo srauto paraiškų skaičius eilėje;

$$Y_{k+1} = \begin{cases} 0, & \text{jei sistemoje paraiškų nėra,} \\ j, & \text{jei aptarnaujama } j\text{-ojo srauto paraiška;} \end{cases}$$

$$Y_{k+2} = \begin{cases} 0, & \text{jei sistemoje paraiškų nėra,} \\ 1, & \text{jei paraiška aptarnaujama pirmoje fazėje,} \\ 2, & \text{jei paraiška aptarnaujama antroje fazėje.} \end{cases}$$

Sistemos būsenų skaičius lygus

$$2k\prod_{i=1}^{k}(l_i + 1) + 1.$$

Sistemos charakteristikas skaitmeninis modelis skaičiuoja pagal formules

$$L_q^{(j)} = \sum_{y_j=1}^{l_j} \sum_{y_1,\dots,y_{k+2}} y_j \pi(y_1, \dots, y_j, \dots, y_k, y_{k+1}, y_{k+2}),$$

$$W_q^{(j)} = \frac{L_q^{(j)}}{\lambda_j}, \quad j = \overline{1,k},$$

čia $\pi(\cdot)$ sistemos būsenos stacionari tikimybė.

Jei sistemoje eilės neribotos, tai tas pačias charakteristikas galima apskaičiuoti analitiškai iš formulių [3]:

$$W_q^{(j)} = \frac{\sum_{m=1}^{k} \lambda_m (E_m^2(t) + \sigma_m^2(t))}{2(1 - S_{j-1})(1 - S_j)};$$

$$L_q^{(j)} = \lambda_j W_q^{(j)},$$

$$S_0 \equiv 0, \qquad S_j = \sum_{i=1}^{j} \rho_i < 1, \quad \rho_i = \lambda_i E_i(t), \quad j = \overline{1,k}.$$

$E_j(t)$ ir $\sigma_j^2(t)$ yra j-ojo paraiškų srauto aptarnavimo laiko skirstinio vidurkis ir dispersija.

Sistema buvo modeliuojama su parametrais:

$$k = 2, \quad \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 3, \quad d_1 = 10^{-1},\ d_2 = 9^{-1},\ l_1 = 7,\ l_2 = 11.$$

Skaitmeninio modelio rezultatai:

$$L_q^{(1)} = 0{,}25674, \quad L_q^{(2)} = 0{,}72127, \quad W_q^{(1)} = 0{,}064185, \quad W_q^{(2)} = 0{,}2404233.$$

Analitinio modelio rezultatai:

$$L_q^{(1)} = 0{,}25679, \quad L_q^{(2)} = 0{,}72132, \quad W_q^{(1)} = 0{,}0641975, \quad W_q^{(2)} = 0{,}24044.$$

Rezultatai parodė, kad nemarkovišką sistemą su begaline būsenų aibe galima pakankamai gerai aproksimuoti markoviška sistema su baigtiniu būsenų skaičiumi.

LITERATŪRA

[1] D. R. Cox, A use of complex probabilities in the theory of stochastic process. *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 1955, **51**, 313–319.

[2] H. Pranevitchius, E. Valakevitchius, *Numerical models for systems represented by Markovian processes*, Technologija, Kaunas, 1996.

[3] A. Handy and A. Taha, *Operations Research*, Macmillan Publishing Company, New York, 1987.

On numerical modelling of stochastic systems

E. Valakevičius

The paper considers a method to construct numerical models of non-markovian stochastic systems. The idea is to approximate a general distribution function of positive random value by mixture of exponential stages. The example is given.