Liet. matem. rink, **47**, *spec. nr.,* 2007, 230–232

Europos studentų olimpiada’07

Dainius DZINDZALIETA (MII)
el. paštas: dainiusda@yahoo.com

Kiekvienais metais Čekijos Vojtěch Jarník universitete organizuojama tarptautinė studentų matematikos olimpiada. Šioje olimpiadoje gali varžytis visų Europos šalių komandos, iš anksto atsiuntusios paraišką. Į šią olimpiadą Vilniaus universitetas taip pat siunčia savo komandą. Buvęs olimpiadininkas Paulius Drungilas dabar jau pats rūpinasi šios komandos sudarymu ir kelione, be to, ir sunki apeliacijos našta tenka jam.

Olimpiados dalyviai pagal tai, kuriame kurse studijuoja, skirstomi į dvi grupes. Pirmajai grupei priskiriami I–II kurso studentai, antrajai – III–IV kurso studentai. Žinoma, pagal grupes skirstomi ir uždaviniai. Jaunesni studentai gauna užduotis, kurios nereikalauja gilaus universiteto kurso žinojimo, todėl antrakursis praktiškai neturi jokio pranašumo prieš pirmo kurso studentą. Vyresniesiems studentams jau tenka užduotys, kurioms išspręsti nebeužtenka vien gero mąstymo, čia jau reikia universitete įgyjamų žinių.

Prieš olimpiadą studentai gauna identifikavimo numerį, kurį užrašo ant voko, grąžinamo pasibaigus sprendimui skirtoms 4 valandoms. Taip gana efektyviai užtikrinamas konfidencialumas. Užduotys pateikiamos anglų kalba, sprendimai taip pat turi būti užrašyti ja, todėl pateikiame kiekvienos grupės užduotis anglų kalba, taip tikėdamiesi būti kuo tikslesni.

I grupė

Problem 1. *Can the set of positive rationals be split into two nonempty disjoint subsets Q_1 and Q_2, such that both are closed under addition, i.e., $p + q \in Q_k$ for every $p, q \in Q_k$, $k = 1, 2$?*

Can it be done when addition is exchange for multiplication, i.e., $p \cdot q \in Q_k$ for every $p, q \in Q_k$, $k = 1, 2$?

[10 points]

Problem 2. *Alice has got a circular key ring with n keys, $n \geqslant 3$. Wnen she takes it out of her pocket, she does not know whether it got rotated and/or flipped. The only way she can distinguish the keys is by colouring them (a colour is assigned to each key). What is the* ***minimum number*** *of colours needed*?

[10 points]

Problem 3. *A function $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ is called slowly changing if for any $t > 1$ the limit $\lim_{x\to\infty} \frac{f(tx)}{f(x)}$ exists and is equal to 1. Is it true that every slowly* *changing function has for sufficiently large x a constant sign (i.e., is it true that for every slowly changing f there exists an N such that for every $x, y > N$ we have $f(x)f(y) > 0$?)*

[10 points]

Problem 4. *Let $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$ be an arbitrary function satisfying*

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \leqslant f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + 1$$

for all pairs $x, y \in [0,1]$. Prove that for all $0 \leqslant u < v < w \leqslant 1$

$$\frac{w-v}{w-u} f(u) + \frac{v-u}{w-u} f(w) \leqslant f(v) + 2.$$

[10 points]

II grupė

Problem 1. *Construct a set $A \in [0,1] \times [0,1]$ such that A is dense in $[0,1] \times [0,1]$ and every vertical and every horizontal line intersects A in at most one point.*

[10 points]

Problem 2. *Let A be a real $n \times n$ matrix satisfying*

$$A + A^t = I,$$

where A^t denotes the transpose of A and I the $n \times n$ identity matrix. Show that $\det A > 0$.

[10 points]

Problem 3. *Let $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that $f(0) = f(1) = 0$. Prove that the set*

$$A := \big\{h \in [0,1]\colon\ f(x+h) = f(x) \text{ for some } x \in [0,1]\big\}$$

is Lebesgue measureable and has Lebesgue measure at least $\frac{1}{2}$.

[10 points]

Problem 4. *Let S be a finite set with n elements and $\mathcal{F}$ a family of subsets of S with the following property*:

$$A \in \mathcal{F}, \quad A \subseteq B \subseteq S \Rightarrow B \in \mathcal{F}.$$

Prove that the function $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ given by

$$f(t) := \sum_{A \in \mathcal{F}} t^{|A|}(1-t)^{|S \setminus A|}$$

is nondecreasing ($|A|$ denotes the number of elements of A).

[10 points]

Kaip ir tarptautinėje moksleivių olimpiadoje, komandos vadovas kitą dieną po olimpiados, susipažinęs su darbais, bendrauja su vertinimo komisija ir bando išsiderėti kuo didesnį balų skaičių. Tai ypač sudėtingas darbas, kuris kartais reikalauja žymiai daugiau išmonės, nei tų uždavinių sprendimas.

Norėdami parodyti, jog uždaviniai nėra neįveikiami, pateikiame dviejų uždavinių sprendimus.

I grupės 1 uždavinio sprendimas.

Solution. (a) No. If $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q_k$ then of course $\frac{ps+qr}{qs} \in Q_k$. Adding n times $\frac{p}{q}$ and m times $\frac{r}{s}$ gives $\frac{nps+mqr}{qs} \in Q_k$ for all positive integers n, m, hence $\overline{n}p + \overline{m}r \in Q_k$ for all positive integers $\overline{n}, \overline{m}$. So if $\frac{p_k}{q_k}, r_k s_k \in Q_k$ we get that $p_1 p_2 + r_1 r_2 \in Q_1 \cap Q_2$.

(b) Yes, for instance

$$Q_1 = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ \colon (m,n) = 1 \text{ and } 2 \,|\, n \right\} \text{ and } Q_2 = \mathbb{Q}^+ \backslash Q_1.$$

II grupės 1 uždavinio sprendimas.

Solution. Take $\alpha, \beta \notin \mathbb{Q}$ such that $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$. Then

$$A := \left\{ \big(\{n\alpha\}, \{n\beta\}\big) \colon n \in \mathbb{N} \right\},$$

where $\{x\}$ denotes the fractional part of x, fulfills the assumptions.

Norime pažymėti, jog šio straipsnio tikslas yra supažindinti skaitytojus su studentų olimpiadų taisyklėmis ir uždaviniais, o ne pateikti dar nematytus uždavinius ar sprendimus. Siūlome skaitytojams patiems išspręsti likusius uždavinius ir galbūt net pabandyti sugalvoti įdomesnius pirmųjų uždavinių sprendimus.

Literatūra

1. D. Dzindzalieta, VU studentų matematikos olimpiadai praėjus, *Liet. matem. rink.*, **46**(spec. nr.), 151–152 (2006).
2. D. Dzindzalieta, VU studentų olimpiada, *Liet. matem. rink.*, **47**(spec. nr.) (2007).

SUMMARY

D. Dzindzlieta. Student's olympiad EUROPE 2007

Problems of a students olympiad EUROPE 2007 are considered. The problems are given in English and Lithuanian. Two solutions of problems are proposed.

Keywords: olympiads, questions, sets.