Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 79–83

Efektyvus liekamojo nario įverčio panaudojimas ribinėse teoremose

Rimantas SKRABUTĖNAS (VPU)
el. paštas: rimantas.skrabutenas@vpu.lt

Aritmetinių funkcijų reikšmių pasiskirstymo tyrimuose paprastai pradedama nuo atitinkamos charakteristinės funkcijos asimptotikos nagrinėjimo. Tai pasakytina tiek klasikiniu $f\colon N \to C$ atveju ([1–2]), tiek ir nagrinėjant aritmetines funkcijas, apibrėžtas specialioje (J. Knopfmacherio) pusgrupėje G.

Pagal apibrėžimą, *adicinė aritmetinė pusgrupė* G yra laisvoji komutatyvi pusgrupė (su vienetiniu elementu 1), kurią generuoja skaiti pirminių elementų p aibė P. Aibėje G yra apibrėžta visiškai adityvioji *laipsnio funkcija* $\delta\colon G \to N \cup \{0\}$ tokia, kad, su kiekvienu $p \in P, \delta(p) \geqslant 1$ ir galioja tokia aksioma.

Aksioma. *Egzistuoja tokios konstantos $A > 0,\ q > 1$ ir $0 \leqslant \nu < 1$, kad*

$$G(n) := Card\{a \in G; \quad \delta(a) = n\} = Aq^n + \mathrm{O}(q^{\nu n}).$$

Reziumuojant autoriaus pastaruoju atveju paskelbtus rezultatus ([3–5]), galima konstatuoti, kad pavyko gauti ir standartinių lokaliųjų ribinių teoremų analogus, ir asimptotinius skleidinius, ir didžiųjų nuokrypių teoremas.

Pateikiamame straipsnyje atkreipiame skaitytojų dėmesį į tai, kad, įrodant ribines teoremas, neretai tiriamųjų aritmetinių funkcijų klases aprašančios sąlygos arba nepilnai išnaudojamos (kai yra gautas charakteristinės funkcijos asimptotinis skleidinys), arba tos sąlygos apskritai nepakankamos analizinio metodo taikymui.

Jeigu tiriamųjų aritmetinių (adityviųjų ar multiplikatyviųjų) funkcijų $g\colon G \to C$ klasę $M(G)$ aprašysime sąlyga: *su visais galimais $\nu \in C$ yra tenkinamos sąlygos*

$$\sum_{p \in P, \delta(p) = l, g(p) = \nu} 1 = \pi(l)(\lambda_\nu + \rho_\nu(l)), \quad l \geqslant 1, \quad \pi(l) = \sum_{p \in P, \delta(p) = l} 1, \tag{1}$$

čia $\lambda_\nu \in [0, 1]$ – konstantos, o $\rho_\nu(l)$ – liekamieji nariai, tai pirmąjį narį atitinkamos charakteristinės funkcijos asimptotiniame skleidinyje analiziniu metodu pavyksta gauti, kai liekamieji nariai $\rho_\nu(l)$ tenkina bent jau "logaritmines" mažėjimo sąlygas, pavyzdžiui: $\rho_\nu(l) =: C_\nu(l)(\log l)^{-2-\varepsilon}$ *su konstanta $\varepsilon > 0$ ir (tolygiai su visais $l \geqslant 1$) konverguojančia eilute $\sum_\nu |C_\nu(l)|$*. Todėl ir ribinės teoremos tuokart galioja atitinkamoje zonoje.

Pasirodo, kad analizinis metodas tinka ir tada, kai liekanos $\rho_\nu(l)$ formaliai (1) sąlygos netenkina, bet turi specialų pavidalą.

Tarkime yra išpildyta (1) sąlyga, o liekamieji nariai $\rho_\nu(u)$, gali būti užrašyti pavidalu

$$\rho_\nu(u) =: \vartheta_\nu(u) + \varepsilon_\nu(u).$$

Tarkime toliau, kad egzistuoja tokios monotoniškai mažėjančios funkcijos $r(n)$ ir $n^{-1}r_1(n)$, kad integralai

$$\int_1^\infty \frac{r(u)}{u}\,\mathrm{d}u, \quad \int_1^\infty \frac{r_1(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

konverguoja ir, be to, tenkinamos sąlygos: funkcijos

$$\rho(n) := \sum_{k=1}^n q^k \sum_\nu \nu\varepsilon_\nu(k),$$

diferencijuojamos funkcijos

$$\rho_1(n) := \sum_{k=1}^n q^k \sum_\nu \nu\vartheta_\nu(k),$$

ir jos išvestinės augimo eilė nusakoma įverčiais

$$\rho(u) = Bq^u r(u), \quad \rho_1(u) = Bq^u r_1(u), \quad \rho_1^{'}(u) = Bq^u r(u). \tag{2}$$

Multiplikatyviųjų funkcijų $g\colon G \to C$, *tenkinančių išvardintas sąlygas, klasę žymėkime* $M_1(G)$.

Kai aritmetinė multiplikatyvioji funkcija $g \in M_1(G)$, tai:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k \sum_{\delta(p)=k} g(p) &= \sum_{k=1}^n k \sum_\nu \nu \sum_{\delta(p)=k, g(p)=\nu} 1 \\
&= \sum_{k=1}^n k\pi(k) \sum_\nu \nu(\lambda_\nu + \rho_\nu(k)) = \sum_{k=1}^n k\pi(k) \sum_\nu \nu(\lambda_\nu + \vartheta_\nu(k) + \varepsilon_\nu(k)) \\
&= \chi \sum_{k=1}^n k\pi(k) + \sum_{k=1}^n k\pi(k) \sum_\nu \nu\vartheta_\nu(k) + \sum_{k=1}^n k\pi(k) \sum_\nu \nu\varepsilon_\nu(k), \quad \chi := \sum_\nu v\lambda_\nu.
\end{aligned}$$

Iš čia, naudodami įprastus darbo [3] žymenis:

$$Z(y) := \sum_{n=0}^\infty \Big(\sum_{\delta(\alpha)=n} 1 \Big) y^n = \prod_{k=1}^\infty (1-y^k)^{-\pi(k)},$$

$$F(y) := \sum_{n=0}^\infty \Big(\sum_{\delta(\alpha)=n} g(a) \Big) y^n =: Z^\chi(y) H(y,g),$$

$$L(y) := L(y,g) = \sum_{k=1}^\infty (\sum_{\delta(\alpha)=n} g(a)) y^n; \quad L_0(y) := L(y,1),$$

turime:

$$\sum_{k=1}^{n} k \sum_{\delta(p)=k} (g(p)-\chi) = \rho_1(n) + \rho(n). \tag{3}$$

Pagrindinis sumos

$$M_n(g) := \frac{1}{Aq^n} \sum_{m,\delta(m)=n} g(m)$$

asimptotikos narys, kaip ir darbe [3], gaunamas naudojant (3) išraišką ir klasės $M_1(G)$ apibrėžime postuluojamas funkcijų $\rho(u)$ ir $\rho_1(u)$ (2) savybes.

Aptarsime kelis svarbiausius įrodymo žingsnius.

Pirmiausia, sumuojant dalimis, nesunku gauti formulę:

$$\begin{aligned} L(y) - \chi L_0(y) \;&:= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\delta(p)=k} (g(p)-\chi) = \int_1^{\infty} \frac{(\rho(u)+\rho_1(u))y^u}{u^2}\,\mathrm{d}u \\ &+ \;(\log y) \int_1^{\infty} \frac{\rho(u) y^u}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^{\infty} \frac{\rho_1^{'}(u) y^u}{u}\,\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{4}$$

Iš tikrųjų, iš (3) turime:

$$\sum_{k=1}^{n} k \sum_{\delta(p)=k} (g(p)-\chi) y^k = (\rho_1(n)+\rho(n)) y^n - \log y \int_1^n (\rho_1(u)+\rho(u)) y^u\,\mathrm{d}u.$$

Taigi,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \sum_{\delta(p)=k} (g(p)-\chi) y^k = \sum_{k=1}^{n} k \sum_{\delta(p)=k} (g(p)-\chi) \frac{y^k}{k} \\ &\quad = \frac{1}{n}((\rho_1(n)+\rho(n)) y^n - \log y \int_1^n (\rho_1(u)+\rho(u)) y^u\,\mathrm{d}u) \\ &\quad\ - \int_1^n \Big((\rho_1(u)+\rho(u)) y^u - \log y \int_1^u (\rho_1(\nu)+\rho(\nu)) y^{\nu}\,\mathrm{d}\nu \Big)\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{u}\Big) \\ &\quad := N(\rho_1) + N(\rho). \end{aligned}$$

$N(\rho)$ skaičiuojame tradiciškai:

$$\begin{aligned} N(\rho) \;&=\; \frac{\rho(n)}{n} y^n - \frac{1}{n} \log y \int_1^n \rho(u) y^u\,\mathrm{d}u + \int_1^n \frac{\rho(u)}{u^2} y^u\,\mathrm{d}u \\ &\qquad + \log y \int_1^n \Big(\int_1^u \rho(\nu) y^{\nu}\,\mathrm{d}\nu \Big)\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{u}\Big) \\ &= \frac{\rho(n)}{n} y^n - \frac{1}{n} \log y \int_1^n \rho(u) y^u\,\mathrm{d}u + \int_1^n \frac{\rho(u)}{u^2} y^u\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

$$+\frac{\log y}{n}\int_1^n \rho(u)y^u\,\mathrm{d}u-\log y\int_1^n \rho(u)y^u\,\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Tokią išraišką turėjome ir darbe [3], todėl ir jos įtaka galutiniam rezultatui išlieka nepakitusi. Funkcijos $\rho_1(n)$ diferencijuojamumas ir augimo eilė (2) įgalina gauti panašią išraišką ir nariui $N(\rho_1)$. Būtent:

$$\begin{aligned}N(\rho_1) &= \frac{\rho_1(n)}{n}y^n-\frac{1}{n}\log y\int_1^n \rho_1(u)y^u\,\mathrm{d}u+\int_1^n \frac{\rho_1(u)}{u^2}y^u\,\mathrm{d}u\\ &\quad+\log y\int_1^n\Big(\int_1^u \rho_1(\nu)y^\nu\,\mathrm{d}\nu\Big)\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{u}\Big)\\ &= \frac{\rho_1(n)}{n}y^n+\int_1^n \frac{\rho_1(u)}{u^2}y^u\,\mathrm{d}u-\log y\int_1^n \rho_1(u)y^u\,\frac{\mathrm{d}u}{u}.\end{aligned}$$

Tad, sekant straipsniu [3], kai $qy<1$, perėję prie ribos $n\to\infty$, pasinaudoję funkcijų $\rho(u)$ ir $\rho_1(u)$ savybėmis (2), ir atsižvelgdami į tai, kad $\rho_1(1)=0$, gausime (4) formulę:

$$\begin{aligned}L(y)-\chi(t)L_0(y) &= \int_1^\infty \frac{\rho(u)y^u}{u^2}\,\mathrm{d}u\\ +\int_1^\infty \frac{\rho_1(u)y^u}{u^2}\,\mathrm{d}u &- (\log y)\int_1^\infty \frac{\rho(u)y^u}{u}\,\mathrm{d}u-(\log y)\int_1^\infty \frac{\rho_1'(u)y^u}{u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Lieka pastebėti, kad straipsnyje [3] gautas liekamasis narys pasikeis priklausomai nuo funkcijos $\rho_1(u)$ savybių.

Teorema. *Jei* $g\in M_1(G),\ |g|\leqslant 1$, *tai*

$$\begin{aligned}M_n(g) &= \frac{(An)^{\chi-1}}{\Gamma(\chi)}H(q^{-1},g)+I(G)(-1)^n\frac{A_1^\chi n^{-\chi-1}}{A\Gamma(-\chi)}H(-q^{-1},g)\\ &\quad+B\min(\log n,(|\Re\chi|^{-1}))R_1(n).\end{aligned}$$

Čia

$$A_1:=\frac{1}{A}\prod_{p\in P}\Big(1-\frac{1}{||p||}\Big)^{-1}\Big(1-\frac{(-1)^{\delta(p)}}{||p||}\Big)^{-1},\quad ||a||:=q^{\delta(a)},$$

$$R_1(n)=\max\Big\{\frac{1}{n},\frac{1}{n}\int_1^n r(u)\,\mathrm{d}u,\ \int_n^\infty\frac{r(u)}{u}\,\mathrm{d}u,\ \int_n^\infty\frac{r_1(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u,\ \frac{1}{n}\int_1^n\frac{r_1(u)}{u}\,\mathrm{d}u\Big\}.$$

References

[1] R. Skrabutėnas, Limit local distribution laws for one class of arithmetic functions, *Lith. Math. J.*, **18**(1), 187–202 (in Russian) (1978).

[2] R. Skrabutėnas, A theorem on large deviation of multiplicative functions,*Lith. Math. J.*, **18**(3), 137–148 (in Russian) (1978).
[3] E. Manstavičius, R. Skrabutėnas, Summation of the values of multiplicative functions on semigroups, *Lith. Math. J.*, **33**(3), 330–340 (in Russian) (1993).
[4] R. Skrabutėnas, Local distributions of arithmetic functions on semigroups, in *New Trends in Probab. and Stat.*, TEV Vilnius VSP Utrecht, Tokyo (1997), pp. 363–370.
[5] R. Skrabutėnas, Asimptotiniai skleidiniai didžiųjų nuokrypių lokaliojoje teoremoje, *Liet. matem. rink.*, **42**(spec.nr.), 87–92 (2002).

The effective use of remainder term estimation in the limit theorems

R. Skrabutėnas

We investigate the asymptotic behavior of mean value of multiplicative arithmetic function from the class $M_1(G)$. In the present paper the asymptotic formula under special condition on prime elements of Knopfmacher's semigroup G is obtained.