LMD mokslo darbai, 111–116
1998, Vilnius

Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $0<\rho_j<1$ для многосвязной области, ограниченной сложным контуром Дини-Липшица

П. Алекна (ШУ)

1. Для многосвязной области, ограниченной сложным контуром Дини–Липшица $L=\bigcup\limits_{j=1}^{m} L_j$ [1], решается следующая краевая задача Римана:

требуется найти кусочно-аналитическую функцию $\Phi(z)$, предельные значения которой $\Phi^{\pm}(t)$ на $\widetilde{L}=L\setminus\{0,\infty\}$ удовлетворяют линейному соотношению

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t)+g(t),\quad t\in\widetilde{L}. \tag{1}$$

Заданные функции $G(t)$, $g(t)$ подчинены условиям $\left(j=\overline{1,m}\right)$

$$\left.\begin{aligned} g(t),\ \ln G(t)\in \mathcal{D}_p\left(L^0\right),\quad & L^0=L\bigcap\left(\,|\,z\,|\le R\,\right),\\ \ln|\,G(t)|\in \mathcal{D}_p\left(L_j^*\right),\quad & L_j^*=L_j\setminus L_j^0,\quad p>2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\arg G(t)=\varphi_j(t)\ln^{\rho_j}|\,t\,|,\quad 0<\rho_j<1,\ \ t\in L_j^*, \tag{3}$$

где
$$\varphi_j(t)\in \mathcal{D}_{\alpha_j}\left(L_j^*\right),\ \varphi_j(\infty)=\lambda_j,\ \ \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\ne 0,\ \ \alpha_j>\rho_j+1,$$

$$g(t)\in H_{\nu_j}\left(L_j^*\right),\ \ 0<\nu_j\le 1,\quad g(\infty)=0. \tag{4}$$

Из условия (3) следует, что задача (1)–(4) имеет бесконечный индекс логарифмического порядка $0<\rho_j<1$ многостороннего завихрения ([2], с. 512).

Решение задачи (1)–(4) будем искать в классе функций **B**, аналитических и ограниченных в криволинейных углах D_j.

Из линейности соотношения (1) следует, что достаточно найти одно частное решение $\Phi_0(z)$ неоднородной задачи (1)–(4) в классе **B**, после чего общее решение этой задачи запишется в виде

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\Psi(z),$$

где $\Psi(z)$ – общее решение в классе **B** соответствующей однородной задачи $(g(t)\equiv 0)$.

Цель работы – построить частное решение $\Phi_0(z)\in$ **B**. Здесь нельзя применить схему построения частного решения $\Phi_0(z)$, использованную в работе [3]. В случае $0<\rho_j<1$ не удаётся построить целую функцию $F_k(z)$, чтобы $|F_k(t)X_k(t)|=O(1)$ при $t\in L_{j_k}(t\to\infty)$, где $X_k(t)$ одно из значений канонической функции

$$X(z)=\prod_{j=1}^{m}X_j(z)=\prod_{j=1}^{m}\exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\ln G(\tau)}{\tau(\tau-z)}d\tau\right\} \tag{5}$$

на контуре L_{j_k} [3]. Неограниченность функции $K_\gamma(t)$ в случае $0<\gamma<1$ (теорема 2 из [4]) при $t\in L_j$ $(t\to\infty)$ приводит к необходимости наложения более тяжелых (по сравнению со случаем $\gamma\ge 1$) ограничений на свободный член $g(t)$. Здесь приходится требовать, чтобы $g(t)\in H_{\nu_j}\left(L_j^*\right)$ (вместо условия Дини–Липшица).

2. Частное решение задачи (1)–(4) будем искать в виде

$$\Phi_0(z)=\frac{\Psi_0(z)}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)}{\Psi_0^+(\tau)(\tau-z)}d\tau=\sum_{j=1}^{m}\frac{\Psi_0(z)}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{g(\tau)}{\Psi_0^+(\tau)(\tau-z)}d\tau, \tag{6}$$

где $\Psi_0(z)=\prod_{k=1}^{s}F_k(z)X_k(z)$ – частное решение однородной задачи, где произведение берётся по отмеченным индексам k [1], для которых $\rho_k'=\max\limits_{1\le j_k\le m}\left(\rho_{j_k}\right)$ и $\lambda_k'=\sum\limits_{j_k}\lambda_{j_k}>0$.

Для простоты нули целой функции $F_k(z)$ расположены на одном луче $\arg z=\pi+\beta_k$ (выбирается ближайший луч $\arg z=\beta_k$ к кривой L_{j_k}).

Определим целую функцию $F_k(z)$ так :

$$F_k(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_n^{(k)}e^{i\beta_k}}\right),\quad r_n^{(k)}=\exp\left\{\frac{(2n-1)\pi}{\lambda_k'}\right\}^{\frac{1}{\rho_k'}}. \tag{7}$$

Представляя целую функцию $F_k(z)$ через интеграл типа Коши, получим

$$F_k(z)=\exp\left\{ze^{-i\beta_k}\int\limits_{r_1^{(k)}}^{\infty}\frac{E\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda'_k}{2\pi}\ln^{\rho'_k}x\right)}{x(x+ze^{-i\beta_k})}\right\}.$$

Нам нужно исследовать поведение функции $\Psi_0(z)$ на кривой L_j, так как её предельное значение слева $\Psi_0^+(\tau)$ входит в подинтегральное выражение формулы (6). Поведение канонической функции $X_k(z)$ известно (лемма 6 из [3]), поэтому исследуем $F_k(t)$ на контуре L_j^*. При $t\in L_j^*$ будем иметь

$$\ln F_k(t)=t\,e^{-i\beta_k}\int\limits_{r_1^{(k)}}^{\infty}\frac{n_{\rho'_k}(x)}{x\left(x+te^{-i\beta_k}\right)}dx+\frac{t\,\lambda'_k e^{-i\beta_k}}{2\pi}\int\limits_{r_1^{(k)}}^{\infty}\frac{\ln^{\rho'_k}(x)}{x\left(x+te^{-i\beta_k}\right)}dx\equiv K_{\rho'_k}(t)+I_{\rho'_k}(t),$$

где $n_{\rho'_k}(x)=E\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda'_k}{2\pi}\ln^{\rho'_k}x\right)-\frac{\lambda'_k}{2\pi}\ln^{\rho'_k}x$.

Сформулируем основные результаты, которые доказываются аналогичными рассуждениями как в работе [4].

Лемма 1. *Если* $0<\rho'_k<1$, *то для функции* $K_{\rho'_k}(t)$ *справедливо асимптотическое представление при* $t\in L_j^*$ $(t\to\infty)$:

$$K_{\rho'_k}(t)=\frac{\frac{1}{12}-\left[n_{\rho'_k}(x)\right]^2}{\rho'_k\,\lambda'_k\pi^{-1}}\ln^{1-\rho'_k}|t|+o\left(\ln^{1-\rho'_k}|t|\right)$$

а производная $K_{\rho'_k}(t)$ *удовлетворяет оценке:*

$$\left|\frac{dK_{\rho'_k}(t)}{dt}\right|\le\frac{M}{|t|},\quad 0<M_1=const.$$

Замечание. Неограниченность $K_{\rho'_k}(t)$ при $0<\rho'_k<1$ объясняется черезвычайно малой густотой нулей

$$r_n^{(k)}=\exp\left\{\frac{(2n-1)\pi}{\lambda'_k}\right\}^{\frac{1}{\rho'_k}},\ n=1,2,3...$$

знакопеременной разрывной функции $n_{\rho'_k}(x)$.

Лемма 2. *Для функции* $I_{\rho'_k}(t)$ *справедливо асимптотическое равенство* $\left(t\to\infty, t\in L_j^*\right)$ *:*

$$I_{\rho'_k}(t)=\frac{\lambda'_k}{2\pi\left(\rho'_k+1\right)}\ln^{\rho'_k+1}|t|+\frac{i\lambda'_k}{2\pi}(\arg t-\beta_k)\ln^{\rho'_k}|t|+S_{\rho'_k}(t)+R_{\rho'_k}(t),$$

где $S_{\rho'_k}(t)\in\mathcal{D}_{3-\rho'_k}\left(L_j^*\right)$, $R_{\rho'_k}(t)$ *– ограниченная функция, производная которой удовлетворяет неравенству*

$$\left|\frac{dR_{\rho'_k}(t)}{dt}\right|\le\frac{M_2}{|t|},\qquad 0<M_2=const.$$

Лемма 3. *Если* $0<\rho'_k<1$ *и целая функция* $F_k(z)$ *определена равенствами (7), то при* $t\in L_j^*$ *справедливо представление* $\left(|t|>R\right)$*:*

$$\ln F_k(t)=\frac{\lambda'_k}{2\pi\left(\rho'_k+1\right)}\ln^{\rho'_k+1}|t|+\frac{i\lambda'_k}{2\pi}(\arg t-\beta_k)\ln^{\rho'_k}|t|+S_{\rho'_k}(t)+R_{\rho'_k}(t)+K_{\rho'_k}(t),$$

где функции $S_{\rho'_k}(t), R_{\rho'_k}(t), K_{\rho'_k}(t)$ *удовлетворяют условиям лемм* 1 *и* 2.

Обозначим

$$\eta_{\rho'_k}(t)=K_{\rho'_k}(t)-K_{\rho'_k}(|t|)=|t|\left(e^{i(\arg t-\beta_k)}-1\right)\int\limits_{r_1^{(k)}}^{\infty}\frac{n_{\rho'_k}(u)}{(u+t)(u+|t|)}du.$$

Лемма 4. *Если* $L_{j_k}^*$ *– контур Дини–Липшица порядка* $\gamma_k>\rho'_k+1$, *то:*

1) функция $\eta_{\rho'_k}(t)$ *непрерывна, ограничена на* $L_{j_k}^*$ *и* $\lim\limits_{\substack{t\in L_{j_k}^*\\ t\to\infty}}\eta_{\rho'_k}(t)=0$;

2) производная функции $\eta_{\rho'_k}(t)$ *удовлетворяет оценке*:

$$\left|\frac{d\eta_{\rho'_k}(t)}{dt}\right|\le\frac{M_{\rho'_k}}{|t|\left(\ln|2t|\right)^{\gamma_k-\rho'_k}},\ 0<M_{\rho'_k}=const.$$

Лемма 5. *В предположениях лемм 3 и 4 при* $t\in L_{j_k}^*$ *справедливо представление*

$$F_k(t)X_k(t)=\exp\left\{K_{\rho'_k}(t)+\eta_{\rho'_k}(t)+Q_{\rho'_k}(t)\right\}+i\left\{M_0\ln|t|+\frac{\lambda'_k}{2\pi}(\arg t-\beta_k-\pi)\ln^{\rho'_k}|t|\right\},$$

где $Q_{\rho'_k}(t)=S_{\rho'_k}(t)+R_{\rho'_k}(t)$, $Q_{\rho'_k}(t)\in D_{\rho_0}\left(L_{j_k}^*\right)$.

$\rho_0 = \min\left(p-1, 3-\rho'_k, \alpha_{j_k} - \rho'_{j_k}, \gamma_k - \rho'_k\right) > 1$.

Замечание. Из свойств функци $\eta_{\rho©_k}(t)$ и $Q_{\rho'_k}(t)$ следует, что при $t \in L^*_{j_k}(t \to \infty)$

$$\ln\left|F_k(t)X_k(t)\right| = K_{\rho'_k}(|t|) + O(1),$$

то есть функция $\ln\left|F_k(t)X_k(t)\right|$ не ограничена на $L^*_{j_k}$.

ЛЕММА 6. *Если выполнены условия* (2)–(4), *а целые функции* $F_k(z)$ $\left(k=\overline{1,s}\right)$ *определены равенствами* (7), $X_k(z)$ *– равенством* (5), *то для* $\varepsilon > 0$, $t \in L^*_{j_k}$

$$\frac{g(t)}{\psi_0^+(t)} \equiv \frac{\tilde{g}(t)}{|t|^{\varepsilon}}, \text{ где } \tilde{g}(t) \in \mathcal{D}_{\rho_0}\left(L^*_{j_k}\right) \text{ и } \tilde{g}(\infty) = 0.$$

ЛЕММА 7. *Если* $X(z)$ *определена равенством (5), а* $F_k(z)$ *- равенствами (7), то в предположениях* (2)–(4) *справедлива оценка при* $z \to \infty$ *по любому пути*:

$$\left|\Psi_0(z)\right| \le e^{A_{\rho'_k} \ln^{\rho'_0}|z|}, \text{ где } 0 < A_{\rho'_k} = const, \ \rho'_0 = \max\left(\rho'_k, 1-\rho'_k\right), \ 0 < \rho'_0 < 1.$$

ТЕОРЕМА 1. *Если* $\lambda'_k > 0$, *а целые функции* $F_k(z)$ $\left(k=\overline{1,s}\right)$ *определены равенствами* (7), $X(z)$*–* (5), *то частное решение* (6) *рассматриваемой задачи* (1)–(4) *ограничено в криволинейных углах* D_j.

ТЕОРЕМА 2. *В условиях разрешимости соответствующей однородной задачи [1] неоднородная краевая задача Римана* (1)–(4) *с бесконечным индексом логарифмического порядка* $0 < \rho_j < 1$ *для многосвязной области, ограниченной сложным контуром Дини–Липшица порядка* $\gamma_k > \rho'_k + 1$, *имеет в классе* **B** *бесконечное множество решений, общая формула которых имеет имеет вид*

$$\Phi(z) = \frac{\Psi_0(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{\Psi_0^+(\tau)(\tau - z)}d\tau + F(z)X(z),$$

где $\Psi_0(z) = \prod_{k=1}^{s} F_k(z)X_k(z)$ *– частное неограниченное решение однородной задачи,* $X(z) = \prod_{j=1}^{m} X_j(z)$ *– каноническая функция* (5), $F_k(z)$*– целые функции, определенные равенствами* (7), *а* $F(z)$*– произвольная целая функция нулевого порядка роста, для которой в окрестности* $z = \infty$ *справедливо асимптотическое неравенство*

$$\ln|F(z)| \le \frac{\lambda \ln^{\rho+1}|z|}{2\pi(\rho+1)} \cdot \left(1 + o\left(\ln^{\rho+1}|z|\right)\right),$$

где $\rho = \max_{1 \le j \le m} \rho_j$, $\lambda = \sum_j \lambda_j > 0$ *(суммирование ведется только по отмеченным индексам* j *).*

ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Алекна, Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для многосвязной области, ограниченной сложным контуром Дини–Липшица, LMD XXXVIII konferencijos darbai. *Specialus Liet. Matem. Rink. priedas*. – V.: Technika, 1997, 59-63.

[2] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва, 1977.

[3] П. Алекна, Краевая задача Римана с плюс-бесконечным индексом логарифмического порядка для сложного контура , *Liet. Matem. Rink.* , 1995, 35(2), 133-140.

[4] П. Алекна, Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $0<\gamma<1$ для полуплоскости, *Liet. Matem. Rink.* , 1974, 14(3), 5-18.

Logaritminės eilės $0<\rho_j<1$ begalinio indekso nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys daugiajungei sričiai, apribotai sudėtiniu Dini–Lipšico kontūru

P. Alekna

Nors homogeninio uždavinio atskiras sprendinys $\Psi_0(z)$ nėra aprėžtas, bet nehomogeninio uždavinio atskiras sprendinys $\Phi_0(z) = \frac{\Psi_0(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)d\tau}{\Psi_0^+(\tau)(\tau-z)}$ yra aprėžtas kiekviename begaliniame kreiviniame kampe D_j $\left(j=\overline{1,m}\right)$. Gauta bendrojo sprendinio išraiška aprėžtų analizinių funkcijų klasėje **B**.