Vilniaus universiteto leidykla

Contents lists available at Vilnius University Press

Jaunųjų mokslininkų darbai
2025, vol. 55, pp. 18–25

eISSN 1648-8776
DOI: https://doi.org/10.15388/JMD.2025.55.2

Diskrečioji ribinė teorema Epšteino dzeta funkcijai

Discrete Limit Theorem for the Epstein Zeta-Function

Birutė Gutauskienė

Vilniaus universiteto Šiaulių akademija
E. p. birute@gutauskas.legal
https://ror.org/03nadee84

Renata Macaitienė

Vilniaus universiteto Šiaulių akademija
E. p. renata.macaitiene@sa.vu.lt
https://ror.org/03nadee84

Santrauka. Straipsnyje nagrinėjamas Epšteino dzeta funkcijos $\zeta(s;Q)$ reikšmių pasiskirstymas. Žinoma, kad dzeta funkcijų asimptotinės savybės geriausiai nusakomos tikimybinėmis ribinėmis teoremomis silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme. Tolydaus tipo ribinę teoremą funkcijai $\zeta(s;Q)$ kompleksinėje plokštumoje pateikė A. Laurinčikas ir R. Macaitienė [11]. Šiame straipsnyje, kuris parengtas B. Gutauskienės magistro darbo [8] pagrindu, pristatomas diskretaus tipo rezultatas.

Pagrindiniai žodžiai: ribinė teorema, silpnasis konvergavimas, tikimybinis matas, Haro matas.

Summary. In this paper, the value distribution of the Epstein zeta-function $\zeta(s;Q)$ is investigated. It is well known that the asymptotic behaviour of zeta-functions is most effectively defined by probabilistic limit theorems in the sense of weak convergence. A limit theorem of continuous type for the function $\zeta(s;Q)$ on the complex plane has been obtained by Laurinčikas and Macaitienė [11]. This paper presents a discrete-type result, based on the Master's Thesis [8] by Gutauskienė.

Keywords: limit theorem, weak convergence, probability measure, Haar measure.

Įvadas

Dirichlė (Dirichlet) eilutės yra vienas iš svarbiausių ir plačiai naudojamų įrankių šiuolaikinėje skaičių teorijoje. Jos yra pagrindinis įrankis, nagrinėjant pirminių skaičių pasiskirstymą, modulinių formų problemas bei daugelyje kitų sričių. Kompleksinio kintamojo funkcijos, tam tikroje pusplokštumėje apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis

Received: 2025-01-30. **Accepted:** 2025-05-19

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}, \qquad s \in \mathbb{C}, \qquad s = \sigma + it,$$

vadinamos dzeta, arba L, funkcijomis. Čia $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ – kompleksinių skaičių seka, $\{\lambda_m : m \in \mathbb{N}\}$ – nemažėjanti realiųjų skaičių seka, tokia, kad $\lim_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty$. Tokio tipo eilutės vadinamos bendrosiomis Dirichlė eilutėmis. Jeigu $\lambda_m = \log m$, turime paprastąją Dirichlė eilutę

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}.$$

Vokiečių matematikas Epšteinas (P. Epstein) siekė rasti kuo bendresnę dzeta funkciją, turinčią Rymano tipo funkcinę lygtį. 1903 m. jis apibrėžė tam tikro tipo Dirichlė eilutę, vėliau pavadintą jo vardu [6]. Šios funkcijos savybes bei elgesį studijavo ir daug kitų matematikų: Hekė (E. Hecke) [9], Čovla (S. Chowla) ir Selbergas (A. Selberg) [4], Fomenko (O. M. Fomenko) [7], Nakamura (T. Nakamura) ir Pankovskis (Ł. Pańkowski) [12] ir kiti. Epšteino dzeta funkcija naudojama ir taikomuosiuose moksluose, pavyzdžiui, kvantinėje fizikoje [5].

Tegul Q yra teigiamai apibrėžta kvadratinė $n \times n$ matrica. Sveikųjų skaičių rinkiniui $\underline{x} \in \mathbb{Z}^n$ pažymėkime $Q[\underline{x}] = \underline{x}^T Q \underline{x}$. Epšteino dzeta funkcija $\zeta(s; Q)$, $s \in \mathbb{C}$, susieta su kvadratine matrica Q, apibrėžiama eilute

$$\zeta(s; Q) = \sum_{\underline{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\underline{0}\}} \left(Q[\underline{x}]\right)^{-s}, \qquad \sigma > \frac{n}{2},$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą.

Dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo klausimai yra labai sudėtingi, todėl šioms problemoms spręsti įprastai naudojami tikimybiniai metodai. Tikimybinių metodų taikymo idėja Dirichlė eilučių reikšmių pasiskirstymui priklauso Borui (H. Bohr) ir Jesenui (B. Jessen) (žr. [2] ir [3]). Jie nagrinėjo Rymano dzeta funkcijos reikšmių pasiskirstymą. Boro ir Jeseno tyrimai yra tęsiami naudojant kitus metodus. Pavyzdžiui, tam tikrų analogiškų rezultatų pateikė Borhsenius (V. Borchsenius) ir Jesenas (B. Jessen), Jesenas ir Vinteris (A. Winter). Tačiau išvysčius tikimybinių matų silpnojo konvergavimo teoriją, pastebėta, kad dzeta funkcijų asimptotinės savybės geriausiai nusakomos tikimybinėmis ribinėmis teoremomis silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme.

Tolydaus tipo ribinę teoremą Epšteino dzeta funkcijai kompleksinėje plokštumoje įrodė Laurinčikas ir Macaitienė [11]. Tačiau diskretaus tipo rezultatai turi kur kas platesnį pritaikymą, pavyzdžiui, fizikoje, kristalografijoje ar pan. Tolydaus tipo teoremose postūmiai įgyja realias reikšmes, diskretaus tipo atveju – imami iš tam tikrų diskrečiųjų aibių (pavyzdžiui, aritmetinės progresijos).

Tyrimo tikslas – įrodyti diskretaus tipo ribinę teoremą silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme Epšteino dzeta funkcijai kompleksinėje plokštumoje.

Straipsnyje įrodyta, kad fiksuotam $h > 0$ ir $\sigma > \frac{n-1}{2}$, tikimybinis matas

$$\frac{1}{N+1}\#\{0 \le k \le N: \zeta(\sigma + ikh; Q) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į tam tikrą ribinį matą. Pateikiamas išreikštinis ribinio mato pavidalas.

Tyrimo metodai. Diskrečiųjų ribinių teoremų įrodymai remiasi Epšteino dzeta funkcijos bei silpnojo tikimybinių matų konvergavimo savybėmis. Naudojami kontūrinio integravimo, aproksimavimo bei ergodinės teorijos metodai, Galagherio (Gallagher) lema. Priklausomai nuo aritmetinės h prigimties, nagrinėjami du skirtingi atvejai.

Epšteino dzeta funkcija

Kaip jau minėjome įvade, Epšteino dzeta funkcija $\zeta(s; Q)$ apibrėžiama eilute

$$\zeta(s; Q) = \sum_{\underline{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\underline{0}\}} \left(Q[\underline{x}]\right)^{-s}, \qquad \sigma > \frac{n}{2},$$

ir gali būti analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = \frac{n}{2}$ su reziduumu $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)\sqrt{detQ}}$. Funkcija $\zeta(s; Q)$ tenkina funkcinę Rymano tipo lygtį:

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(s; Q) = (detQ)^{-1/2}\pi^{s-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2} - s\right)\zeta\left(\frac{n}{2} - s; Q^{-1}\right),$$

čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija. Iš čia nesunku pastebėti, kad Epšteino dzeta funkcija lygi nuliui taškuose $s = -m$; šie nuliai vadinami trivialiaisiais. Kiti nuliai yra netrivialūs. Apie jų išsidėstymą žinome kur kas mažiau, nei apie Rymano dzeta funkcijos, tačiau pastebima, kad priklauso nuo matricos Q. Pavyzdžiui, imkime n-matę vienetinę matricą I_n. Tuomet Epšteino dzeta funkcija išreiškiama Rymano dzeta $\zeta(s)$ ir Dirichlė L-funkcijos $L(s, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$, $\sigma > 1$, tiesine kombinacija. Tuomet turime, jog:

$$\zeta(s; I_1) = 2\zeta(2s),$$

$$\zeta(s, I_2) = 4\zeta(s)L(s, \chi_{-4}),$$

$$\zeta(s, I_4) = 8(1 - 2^{2-s})\zeta(s)\zeta(s-1),$$

čia $L(s, \chi_{-4})$ yra Dirichlė L-funkcija su pagrindiniu Dirichlė charakteriu moduliu 4. Pastebime, kad jei teisinga Rymano hipotezė, tai visi netrivialūs $\zeta(s; I_1)$ nuliai yra kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{1}{4}$. Jei Rymano hipotezės analogas galioja Dirichlė L-funkcijai $L(s, \chi_{-4})$, tuomet visi netrivialūs $\zeta(s, I_2)$ nuliai yra ant tiesių $\sigma = \frac{1}{2}$ ir $\sigma = \frac{1}{4}$. Analogiškai, jei teisinga Rymano hipotezė ir jos analogas Dirichlė L-funkcijai, tuomet netrivialūs $\zeta(s, I_4)$ nuliai yra ant tiesių $\sigma = \frac{1}{2}$, $\sigma = \frac{3}{2}$ bei be galo daug nulių taške $s = 2$. Tiesės $\sigma = \frac{1}{2}$ ir $\sigma = \frac{n-1}{2}$ vadinamos kritinėmis tiesėmis. Tačiau sudėtingesnių matricų Q atveju, nulių išsidėstymas yra kur kas sudėtingesnis.

Svarbu akcentuoti, jog $\zeta(s; Q)$ gali būti užrašoma paprastąja Dirichlė eilute. Pažymėkime $\mathbb{H}$ viršutinę pusplokštumę $\{s \in \mathbb{C}: \mathrm{Im} s > 0\}$, $SL(2, \mathbb{Z})$ – pilną modulinę grupę

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\},$$

o sveikiesiems teigiamiems q, jos pogrupį

$$\Gamma_0(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : SL(2, \mathbb{Z}), c \equiv 0 (mod\ q) \right\},$$

kuris vadinamas Hekės pogrupiu $mod\ q$, arba kongruenčiuoju pogrupiu $mod\ q$. Be to, tegul F yra analizinė viršutinėje pusplokštumėje funkcija. Jeigu visiems elementams $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q)$ funkcija F tenkina funkcinę lygtį

$$F\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^{\kappa} F(z), \qquad \kappa \in \mathbb{N},$$

ir yra analizinė paraboliniuose Γ_0 taškuose, tuomet F vadinama svorio κ ir lygio q moduline forma. Jei F virsta 0 visuose paraboliniuose taškuose, tuomet ji vadinama paraboline forma. Pažymėkime $E_{\kappa}(z)$ Eisenšteino eilutę

$$E_{\kappa}(z) = \sum_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q)} (cz + d)^{-\kappa}, \qquad \kappa > 0.$$

Tarkime, kad $Q[\underline{x}]$ yra sveikasis skaičius su kiekvienu sveikųjų skaičių rinkiniu

$$\underline{x} \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}.$$

Pažymėkime $r_Q(m), m \in \mathbb{N}_0$, elementų $\underline{x}$, tenkinančių žemiau pateiktą reikalavimą, skaičių, t. y.

$$r_Q(m) = \#\{\underline{x} \in \mathbb{Z}^n: Q[\underline{x}] = m, m \in \mathbb{N}_0\}.$$

Tuomet pusplokštumėje $\sigma > \frac{n}{2}$ Epšteino dzeta funkcija gali būti užrašoma paprastąja Dirichlė eilute

$$\zeta(s, Q) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_Q(m)}{m^s}.$$

Fomenko įrodė [7], jog eilutės

$$\Theta(z,Q)=\sum_{m=0}^{\infty} r_Q(m)e^{2\pi imz}$$

yra svorio $\frac{n}{2}$ modulinės formos ir jos gali būti išreiškiamos atitinkamos Eisenšteino eilutės ir tam tikros parabolinės formos suma:

$$\Theta(z,Q)=E_Q(z)+F_Q(z),$$

kur $E_Q(z)=\sum_{m=0}^{\infty} e_Q(m)e^{2\pi imz}$ yra Eisenšteino eilutė, o $F_Q(z)=\sum_{m=0}^{\infty} f_Q(m)e^{2\pi imz}$ – parabolinė forma. Iš čia seka, kad Epšteino dzeta funkcija gali būti išreikšta atitinkamų dzeta funkcijų suma:

$$\zeta(s,Q)=\zeta\left(s;E_Q\right)+\zeta\left(s;F_Q\right),$$

kur

$$\zeta\left(s;E_Q\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e_Q(m)}{m^s},\ \ \zeta\left(s;F_Q\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f_Q(m)}{m^s},\ \ \sigma>\frac{n}{2}.$$

Įrodant ribinę teoremą, šis išskaidymas vaidina ypatingai svarbų vaidmenį. Ivaniec įrodė [10], jog lyginiams $n\geq 4$ Eisenšteino eilutė $E_Q(z)$ yra svorio $\frac{n}{2}$ ir lygio q modulinė forma. Be to, Hekė įrodė [9], jog dzeta funkcija $\zeta\left(s;E_Q\right)$ gali būti išreiškiama elementų $(kl)^{-s}L(s,\chi_k)L\left(s-\frac{n}{2}+1,\varphi_l\right)$ tiesine kombinacija, kur k ir l yra q dalikliai, χ_k ir φ_l – Dirichlė charakteriai moduliu $\frac{q}{k}$ ir $\frac{q}{l}$. Iš čia ir lygybės $\zeta(s,Q)=\zeta\left(s;E_Q\right)+\zeta\left(s;F_Q\right)$ seka, jog pusplokštumėje $\sigma>\frac{n-1}{2}$, Epšteino dzeta funkcija išreiškiama Dirichlė L-funkcijų tiesine kombinacija:

$$\zeta(s,Q)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\frac{a_{kl}}{k^s l^s}L\,(s,\chi_k)L\left(s-\frac{n}{2}+1,\varphi_l\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f_Q(m)}{m^s},$$

čia a_{kl} yra kompleksiniai skaičiai, o χ_k ir φ_l yra neekvivalentūs charakteriai. Be to, jei $f_Q(m)$ galioja įvertis

$$f_Q(m)=O\left(m^{n/4-1/2+\varepsilon}\right),\qquad \varepsilon>0,$$

tai eilutė $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f_Q(m)}{m^s}$ konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma>\frac{n-1}{2}$.

Diskrečioji ribinė teorema Epšteino dzeta funkcijai

Kaip jau minėta, Laurinčikas ir Macaitienė [11] įrodė, kad

$$\frac{1}{T}meas\{t\in[0;T]:\zeta(\sigma+it;Q)\in A\},\qquad A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}),\qquad \sigma>\frac{n-1}{2},$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tam tikrą tikimybinį matą P. Čia $measA$ yra mačios aibės A Lebego matas, o $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ žymi erdvės $\mathbb{X}$ Borelio aibių klasę.
Mūsų tikslas yra pateikti diskretaus tipo rezultatą, kai t reikšmės yra imamos iš aritmetinės progresijos. Pateiksime ir išreikštinį ribinio mato pavidalą. Ribinio mato $P_{\zeta,\sigma}$ apibrėžimui taikoma speciali topologinė struktūra. Apibrėžkime aibę

$$\Omega = \prod_{p} \gamma_p,$$

kur $\gamma_p = \{s \in \mathbb{C}: |s| = 1\}$ visiems pirminiams skaičiams p. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba toras Ω yra kompaktiška topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis Haro matas m_H, taigi, turime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(p)$ žymi p-ąjį elemento $\omega \in \Omega$ komponentą, t. y. $\omega(p)$ yra elemento ω projekcija į $\gamma(p)$. Funkcijos $\omega(p)$ apibrėžimo sritį iš $\mathbb{P}$ išplečiame į natūraliųjų skaičių aibę $\mathbb{N}$:

$$\omega(m) = \prod_{\substack{p^{\alpha}|m \\ p^{\alpha+1}|m}} \omega^{\alpha}(p), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Tuomet $\sigma > \frac{n-1}{2}$ tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą

$$\zeta(\sigma, \omega; Q) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} \frac{a_{kl}\omega(k)\omega(l)}{k^{\sigma} l^{\sigma}} L(\sigma, \omega, \chi_k) L\left(\sigma - \frac{n}{2} + 1, \omega, \varphi_l\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_Q(m)\omega(m)}{m^{\sigma}},$$

kur atitinkamos Dirichlė L funkcijos yra išreiškiamos tolygiai konverguojančiomis Oilerio sandaugomis (beveik visiems $\omega(p)$):

$$L(\sigma, \omega, \chi_k) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi_k(p)\omega(p)}{p^{\sigma}}\right)^{-1} \text{ ir } L\left(\sigma - \frac{n}{2} + 1, \omega, \varphi_l\right) = \prod_p \left(1 - \frac{\varphi_l(p)\omega(p)}{p^{\sigma - \frac{n}{2} + 1}}\right).^{-1}$$

Laurinčikas ir Macaitienė įrodė [11], jog minėtas ribinis matas P yra šio atsitiktinio elemento $\zeta(\sigma, \omega; Q)$ skirstinys.

Diskretusis atvejis yra sudėtingesnis nei tolydusis, nes priklauso nuo skaičiaus h aritmetinės prigimties. Nagrinėjami du h atvejai: kai $h > 0$ yra toks, kad $exp\left\{\frac{2\pi m}{h}\right\}$ yra iracionalusis skaičius (1-asis h tipas) ir kai $h > 0$ yra toks, kad $exp\left\{\frac{2\pi m}{h}\right\}$ nėra iracionalusis skaičius (2-asis h tipas), visiems $m \in \mathbb{N}$. Sakykime, kad $h > 0$ yra 2-ojo tipo. Tuomet nesunku pastebėti, kad egzistuoja toks mažiausias $m_0 \in \mathbb{N}$, kad skaičius $exp\left\{\frac{2\pi m_0}{h}\right\}$ yra racionalusis skaičius. Pavyzdžiui, jei $h = \pi$, pagal Hermitės-Lindemano teoremą, $exp\{2m\}$ yra transcendentinis skaičius visiems $m \in \mathbb{N}$. Kai $h = \frac{2\pi}{\log a}$, $a \in \mathbb{N}$, tuomet $exp\{m \log a\} = a^m$ yra racionalusis skaičius. Tarkime, kad $exp\left\{\frac{2\pi m_0}{h}\right\} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$. Pažymėkime $\mathbb{P}_0$ pirminių skaičių aibės poaibį:

$$\mathbb{P}_0 = \left\{ p \in \mathbb{P}: \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p} = \frac{a}{b}, \qquad \alpha_p \neq 0 \right\}.$$

Be to, tegul Ω_h žymi uždarą grupės Ω pogrupį, generuotą $\{p^{-ih}: p \in \mathbb{P}\}$, $h > 0$. Akivaizdu, jog Ω_h yra kompaktiška grupė, tuomet erdvėje $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h))$ egzistuoja tikimybinis Haro matas m_H^h. Turime tikimybinę erdvę $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_H^h)$. Remiantis Bagchi lema [1, 4.2.2 lema],

$$\Omega_h = \begin{cases} \Omega, & \text{jei } h \text{ yra 1 tipo,} \\ \{\omega \in \Omega: \omega(a) = \omega(b)\}, & \text{jei } h \text{ yra 2 tipo.} \end{cases}$$

Dabar $\omega \in \Omega_h$ ir $\sigma > \frac{n-1}{2}$, tikimybinėjė erdvėje $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_H^h)$ apibrėžkime kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą

$$\zeta_h(\sigma, \omega; Q) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} \frac{a_{kl}\omega(k)\omega(l)}{k^\sigma l^\sigma} L(\sigma, \omega, \chi_k) L\left(\sigma - \frac{n}{2} + 1, \omega, \varphi_l\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_Q(m)\omega(m)}{m^\sigma}$$

ir $P_{\zeta,\sigma,h}$ pažymėkime šio atsitiktinio elemento pasiskirstymą:

$$P_{\zeta,\sigma,h}(A) = m_H^h\{\omega \in \Omega_h: \zeta_h(\sigma, \omega; Q) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Be to, tegul □A žymi aibės A elementų skaičių. Pagrindinis rezultatas yra žemiau pateikta diskrečioji Boro-Jeseno tipo ribinė teorema funkcijai $\zeta(s; Q)$ kompleksinėje plokštumoje.

Teorema. *Tarkime, kad* $n \geq 4$ ir $Q[\underline{x}] \in \mathbb{Z}$, *visiems* $\underline{x} \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, *yra lyginis skaičius. Tuomet, su fiksuota* $\sigma > \frac{n-1}{2}$ *reikšme, tikimybinis matas*

$$\frac{1}{N+1} \#\{0 \leq k \leq N: \zeta(\sigma + ikh; Q) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $N \to \infty$, *silpnai konverguoja į* $P_{\zeta,\sigma,h}$.

Teorema įrodyta B. Gutauskienės magistro darbe [8].

Išvados

Straipsnyje pateikiamas diskretaus tipo tikimybinis rezultatas, kad fiksuotam $\sigma > \frac{n-1}{2}$ matas

$$\frac{1}{N+1}\#\{0 \leq k \leq N: \zeta(\sigma + ikh; Q) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento skirstinį. Diskretusis atvejis yra kur kas sudėtingesnis, nei tolydusis (įrodytas [11]), kadangi priklauso nuo aritmetinės h prigimties. Nagrinėti du h atvejai [8]: kai $exp\left\{\frac{2\pi m}{h}\right\}$ yra racionalusis ir iracionalusis skaičiai, visiems $m \in \mathbb{N}$.

Planuojama įrodyti apibendrintą diskretųjį atvejį, kai postūmiai iš aritmetinės progresijos keičiami tam tikra bendresne funkcija.

Literatūra

1. Bagchi, B. (1981). *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series*, Ph.D. Thesis. Indian Statistical Institute, Calcuta, Indian Statistical Institute.

2. Bohr, H., Jessen, B. (1930). Uber die Wertverteilung der Riemanschen Zetafunktion, Erste Mittei-lung, *Acta Mathematica*, *54*, 1–35. https://doi.org/10.1007/BF02547516

3. Bohr, H., Jessen, B. (1932). Uber die Wertverteilung der Riemanschen Zetafunktion, Zweite Mitteilung. *Acta Mathematica*, *58*, 1–55. https://doi.org/10.1007/BF02547773

4. Chlowa, S., Selberg, A. (1967). On Epstein‘s zeta-function. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *227*, 86–110. https://doi.org/10.1515/crll.1967.227.86

5. Elizade, E. (1995). *Ten Physical Applications od Spectral zeta functions*: Lecture notes in Physics. Berlin: Springer.

6. Epstein, P. (1903). Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. *Mathematische Annalen*, *56*, 615–644. https://doi.org/10.1007/BF01444309

7. Fomenko, O. M. (2002). Order of the Epstein Zeta-Function in the Critical Strip. *Journal of Mathematical Sciences*, *110*(6), 3150–3163. https://doi.org/10.1023/A:1015432614102

8. Gutauskienė, B. (2024). *Diskrečioji Boro-Jeseno tipo ribinė teorema Epšteino dzeta funkcijai*. Magistro darbas. Vilniaus universitetas.

9. Hecke, E. (1937). Über Modulfunktionen und die Dirichletchen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. *Mathematische Annalen*, *114*, 1–28. https://doi.org/10.1007/BF01594160

10. Iwaniec, H. (1997). *Topics in Classical Automorphic Forms*: Graduate Studies in Mathematics, *17*. New Brunswick: Rutgers University, American Mathematical Society.

11. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. (2018). A Bohr-Jessen Type Theorem for the Epstein Zeta-Function. *Results in Mathematics*, *73*, 148. https://doi.org/10.1007/s00025-018-0909-3

12. Nakamura, T., Pańkowski, Ł. (2013). On Zeros and c-Values of Epstein Zeta-Functions. *Siauliai Mathematical Seminar*, *8*(16), 181–195.